



AGH UNIVERSITY OF SCIENCE
AND TECHNOLOGY

Rola oddziaływania spin-orbita w niskowymiarowych strukturach półprzewodnikowych

Paweł Wójcik

Współpraca:

J. Adamowski, B.J. Spisak, M. Wołoszyn
Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej, AGH

M. Nowak,
Akademickie Centrum Materiałów i Nanotechnologii

G. Goldoni, A. Bertoni,
CNR-NANO S3, Institute for Nanoscience, Modena, Italy
Department of Physics, University of Modena and Reggio Emilia, Modena, Italy



OPUS 2011/03/B/ST3/00240
SONATA 2017/26/D/ST3/00109
SONATA 2016/23/D/ST3/00394

Plan prezentacji:

1. Oddziaływanie spin-orbita:

- oddziaływanie Rashby
- oddziaływanie Dresselhausa

2. Oddziaływanie SO w nanodrutach półprzewodnikowych

3. Tranzystor spinowy

4. Nowe koncepcje tranzystora spinowego

5. Oddziaływanie SOI w tworzeniu stanów Majorany

Cykl 11 publikacji (2014-2019) dotyczących roli oddziaływania spin-orbita oraz efektów orbitalnych w niskowymiarowych strukturach półprzewodnikowych i nadprzewodzących:

- [1] **P. Wójcik**, J. Adamowski, B. J. Spisak, M. Wołoszyn, *J. Appl. Phys.* 115 (2014), 104310
- [2] **P. Wójcik**, J. Adamowski, M. Wołoszyn, B. J. Spisak. *J. Appl. Phys.* 118 (2015), 014302
- [3] **P. Wójcik**, M. Zegrodnik, J. Spałek, *Phys. Rev. B* 91 (2015), 224511
- [4] **P. Wójcik**, J. Adamowski, M. Wołoszyn, B. J. Spisak., *Semicond. Sci. Technol.* 30 (2015), 065007
- [5] **P. Wójcik**, J. Adamowski, *Semicond. Sci. Technol.* 31 (2016), 035021
- [6] **P. Wójcik**, J. Adamowski, *Semicond. Sci. Technol.* 31 (2016), 115012
- [7] **P. Wójcik**, J. Adamowski, *Scientific Reports* 7 (2017), 45346
- [8] M. P. Nowak, **P. Wójcik**, *Phys. Rev. B* 97 (2018), 045419
- [9] **P. Wójcik**, M. P. Nowak, *Phys. Rev. B* 97 (2018), 235445
- [10] **P. Wójcik**, A. Bertoni, G. Goldoni, *Phys. Rev. B* 97 (2018), 165401
- [11] **P. Wójcik**, A. Bertoni, G. Goldoni, *Appl. Phys. Lett.* (2019), w druku

Rozwinięcie równania Diraca (metoda Löwdina)

$$H = \frac{p^2}{2m_0} + V + \frac{e\hbar}{2m_0} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} - \frac{\hbar}{4m_0^2 c^2} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} \times \nabla V) - \frac{\hbar^2}{8m_0^2 c^2} \nabla \cdot \nabla V + \dots$$

spinowe rozszczepienie Zeemana
oddziaływanie spin-orbita
wyraz Darwina

Oddziaływania spin-orbita w półprzewodnikach

Przybliżenie k.p

$$H_{SO} = -\frac{\hbar}{4m_0^2 c^2} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} \times \nabla V)$$

8-pasmowy model Kane

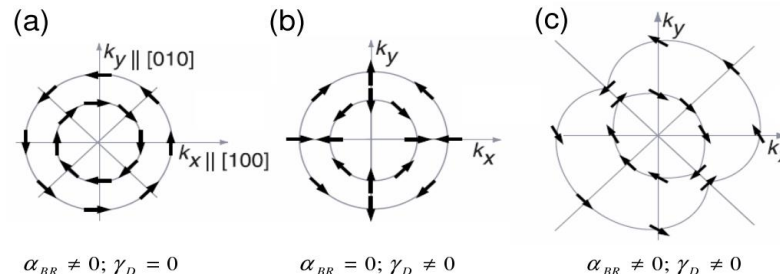
14-pasmowy model Kane

Oddziaływanie SO typu Rashby

Oddziaływanie SO typu Dresselhausa

$$H_R = \alpha_R (k_x \sigma_y - k_y \sigma_x)$$

$$H_D = \beta_D (k_x \sigma_x - k_y \sigma_y)$$



Efektywne pole magnetyczne zależne od wektora falowego

Przybliżenie k.p – 8-pasmowy model Kane

Hamiltonian

$$H_{8 \times 8} = \begin{pmatrix} H_c & H_{cv} \\ H_{cv}^\dagger & H_v \end{pmatrix}$$

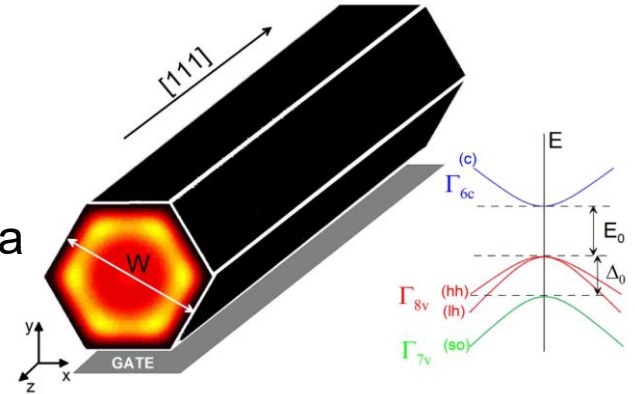
Procedura redukcji

$$\mathcal{H}(E) = H_c + H_{cv}(H_v - E)^{-1}H_{cv}^\dagger.$$

Efektywny Hamiltonian dla elektronów przewodnictwa

$$\mathcal{H} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla_{2D}^2 + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m^*} + E_c + V(x, y) \right] \mathbf{1}_{2 \times 2}$$

$$+ (\alpha_x \sigma_x + \alpha_y \sigma_y) k_z, \quad \text{Rashba SO}$$



Oddziaływanie elektronowe
uwzględnione w modelu pola
średniego

gdzie

$$\frac{1}{m^*} = \frac{1}{m_0} + \frac{2P^2}{3\hbar^2} \left(\frac{2}{E_g} + \frac{1}{E_g + \Delta_g} \right)$$

$$\alpha_x(x, y) \approx \frac{1}{3} P^2 \left(\frac{1}{(E_0 + \Delta_0)^2} - \frac{1}{E_0^2} \right) \frac{\partial V(x, y)}{\partial y},$$

$$\alpha_y(x, y) \approx \frac{1}{3} P^2 \left(\frac{1}{(E_0 + \Delta_0)^2} - \frac{1}{E_0^2} \right) \frac{\partial V(x, y)}{\partial x}.$$

Wewnątrz oraz międzypasmowa stała oddziaływania SO

$$\alpha_{x(y)}^{nm} = \int \int \psi_n(x, y) \alpha_{x(y)}(x, y) \psi_m(x, y) dx dy.$$

Wyniki dla InSb – porównanie z eksperymentem

Eksperyment

PHYSICAL REVIEW B 91, 201413(R) (2015)

Spin-orbit interaction in InSb nanowires

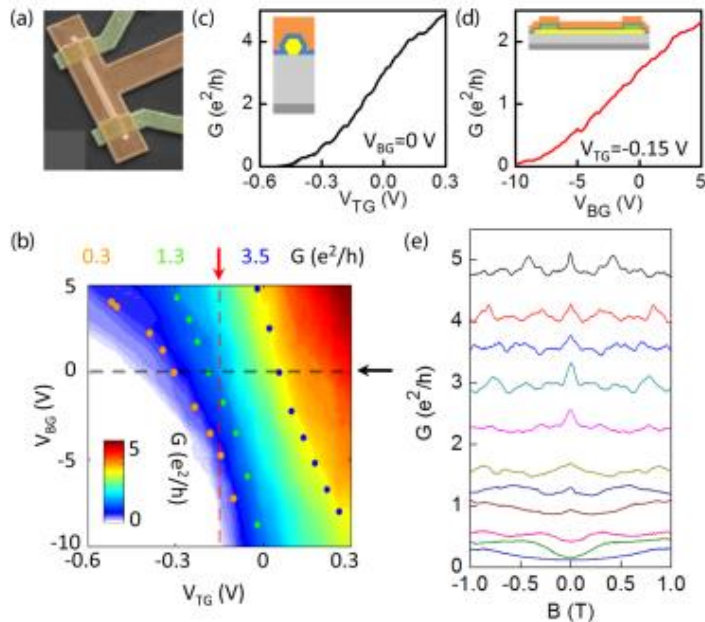
I. van Weperen,¹ B. Tarasinski,² D. Eeltink,¹ V. S. Pribiag,^{1,*} S. R. Plissard,^{1,3,†} E. P. A. M. Bakkers,^{1,3} L. P. Kouwenhoven,¹ and M. Wimmer^{1,‡}

¹QuTech and Kavli Institute of Nanoscience, Delft University of Technology, 2600 GA Delft, The Netherlands

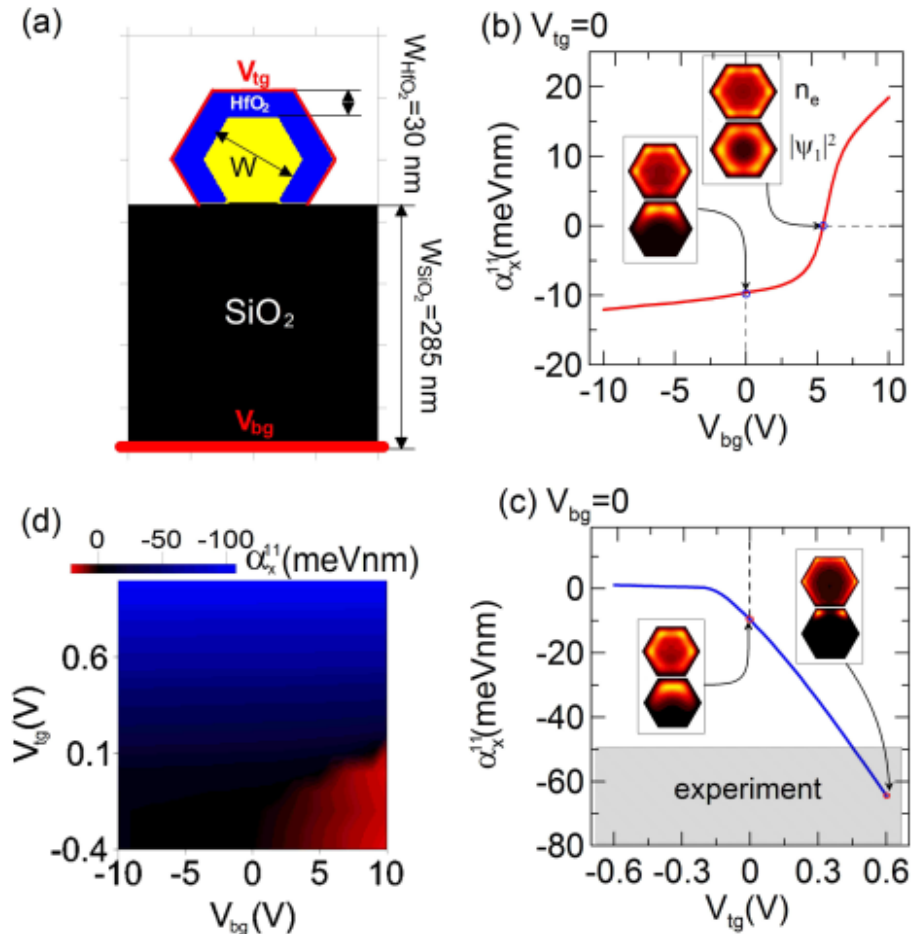
²Instituut-Lorentz, Universiteit Leiden, P.O. Box 9506, 2300 RA Leiden, The Netherlands

³Department of Applied Physics, Eindhoven University of Technology, 5600 MB Eindhoven, The Netherlands
(Received 26 November 2014; revised manuscript received 12 May 2015; published 29 May 2015)

We use magnetoconductance measurements in dual-gated InSb nanowire devices, together with a theoretical analysis of weak antilocalization, to accurately extract spin-orbit strength. In particular, we show that magnetoconductance in our three-dimensional wires is very different compared to wires in two-dimensional electron gases. We obtain a large Rashba spin-orbit strength of $0.5\text{--}1\text{ eV\AA}$ corresponding to a spin-orbit energy of $0.25\text{--}1\text{ meV}$. These values underline the potential of InSb nanowires in the study of Majorana fermions in hybrid semiconductor-superconductor devices.



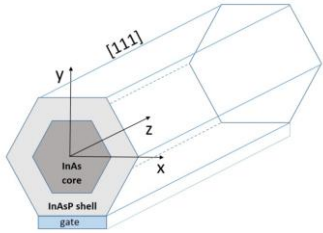
Obliczenia teoretyczne



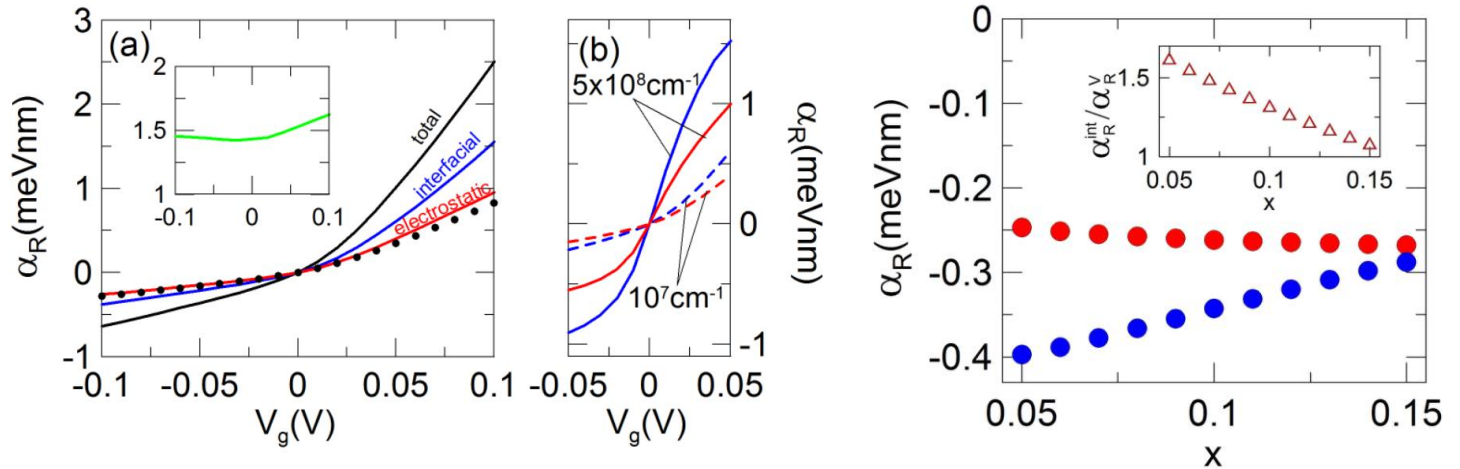
- ✓ Model z jednym parametrem dofitowania określonym przez pomiary konduktancji
- ✓ Dobra zgodność z eksperymentem

Jakościowe porównanie z eksperymentem

Obliczenia teoretyczne



Wzrost SO związany z obecnością międzypowierzchni



Eksperyment

ARTICLE

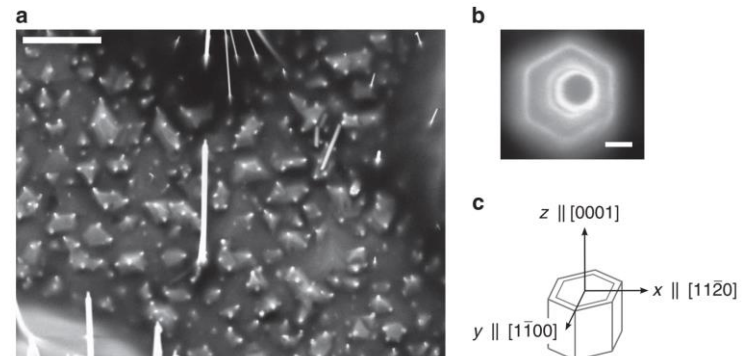
Received 19 Feb 2016 | Accepted 30 Jun 2016 | Published 5 Aug 2016

DOI: 10.1038/ncomms12413

OPEN

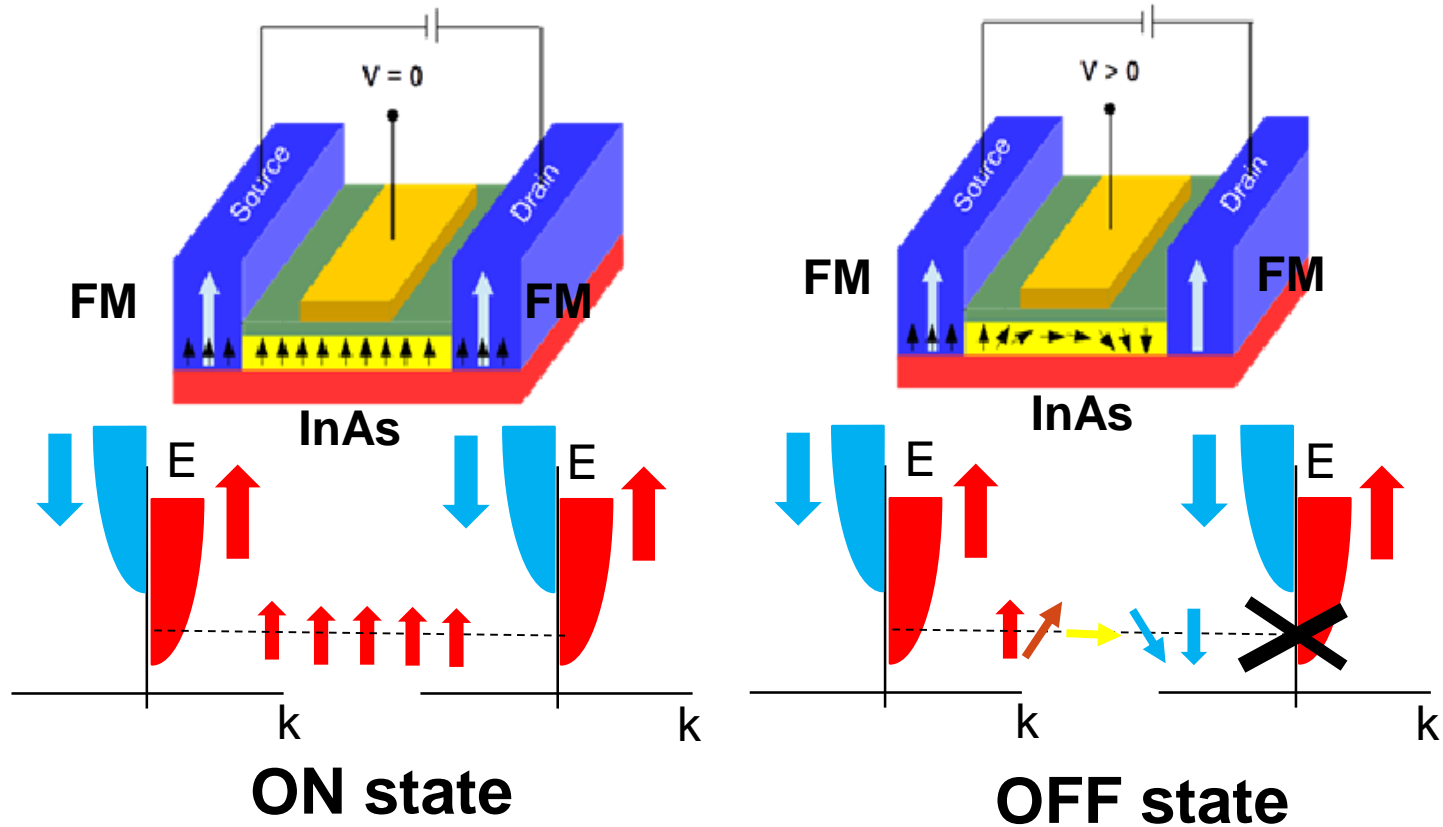
Enhanced spin-orbit coupling in core/shell nanowires

Stephan Furthmeier¹, Florian Dirnberger¹, Martin Gmitra², Andreas Bayer¹, Moritz Forsch¹, Joachim Hubman Christian Schüller¹, Elisabeth Reiger¹, Jaroslav Fabian², Tobias Korn¹ & Dominique Bougeard¹

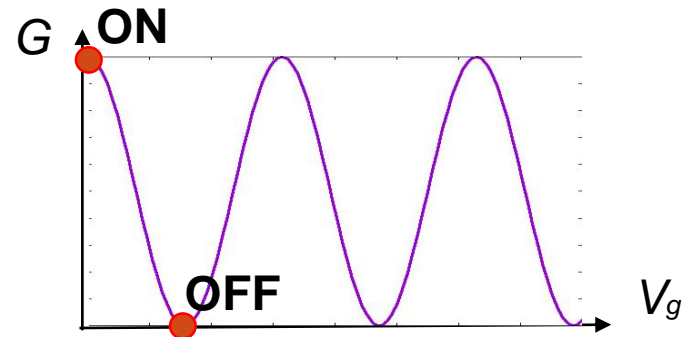


Zastosowanie SOI w spintronice – tranzystor spinowy

S. Datta, B. Das. *Appl. Phys. Lett.* **56** (1990), 665

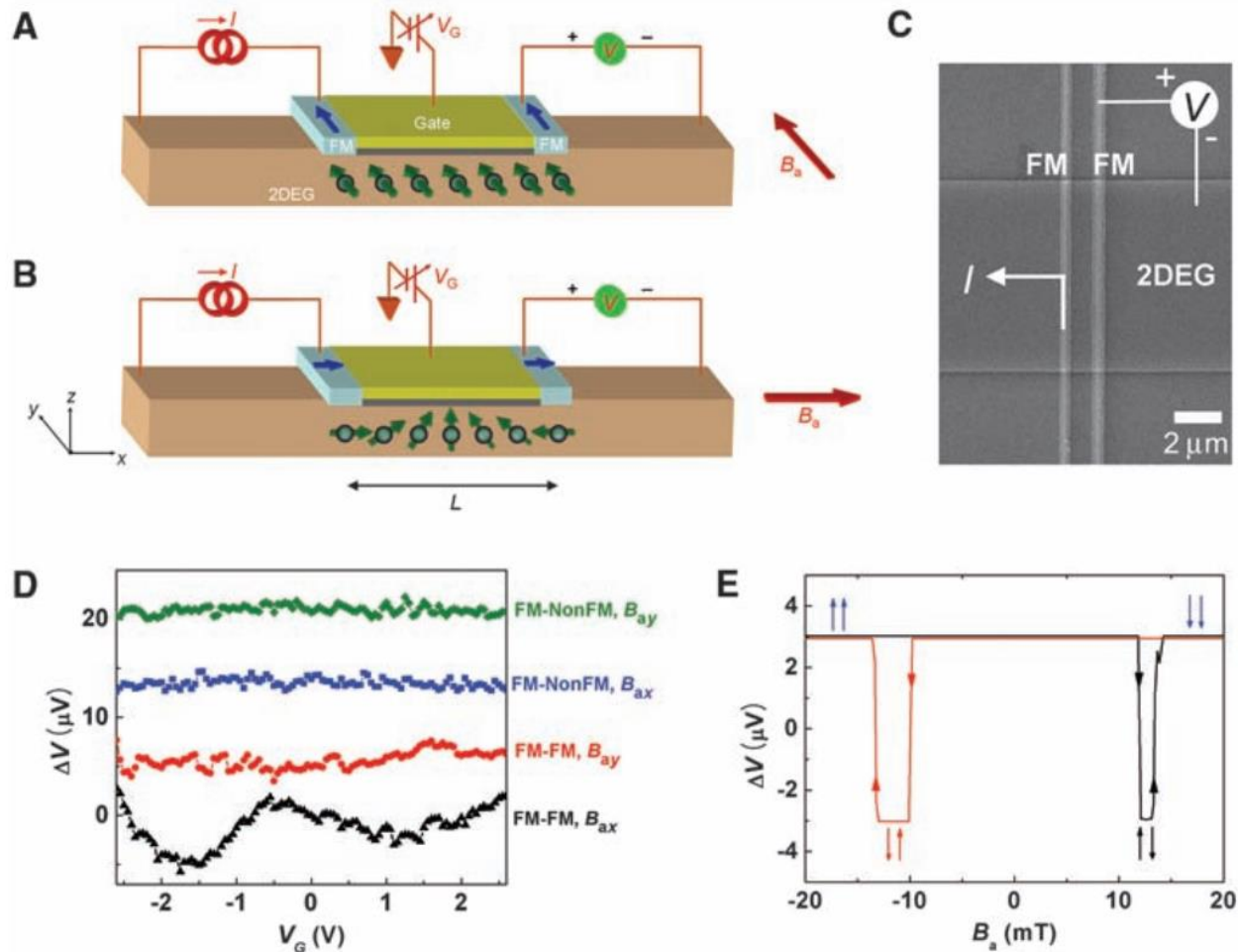


$$G = 2G_0 \cos^2 \left(\frac{m^* \alpha L_g}{\hbar^2} \right)$$



Tranzystor spinowy - eksperyment

H. C. Koo et al. Science 325, 1515 (2009)



Problem:

Niska wartość sygnału na wyjściu i mały współczynnik

$$\frac{G_{ON}}{G_{OFF}}$$

Tranzystor spinowy – słabe punkty

1. Niewystarczająca efektywność wstrzykiwania spinu z ferromagnetycznych kontaktów do półprzewodnikowego kanału przewodzenia – problem niedopasowania rezystancji

- 70% w temperaturze pokojowej
- 90% w niskich temperaturach

$$\frac{G_{ON}}{G_{OFF}} = \frac{1 + P_S P_D}{1 - P_S P_D}$$

To co możemy uzyskać:

Wymagana wartość !!!

A to oznacza:

$$\frac{G_{ON}}{G_{OFF}} (P_{S(D)} = 0.7) = 3$$

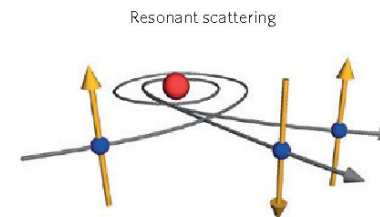
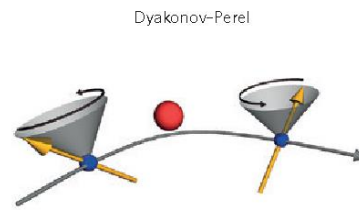
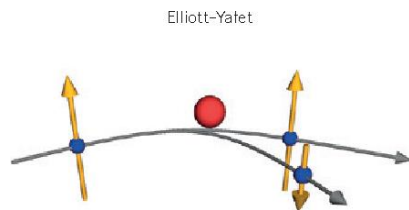
$$\frac{G_{ON}}{G_{OFF}} = 10^5$$

$$P_{S(D)} = 99.9995\%$$

2. Pola magnetyczne od kontaktów w obszarze kanału przewodzenia

3. Relaksacja spinowa w kanale przewodzenia

- mechanizm Dyakonova-Perela
- mechanizm Elliota-Yafeta



Tranzystor spinowy

```
graph TD; A[Tranzystor spinowy] --> B[Udoskonalenie pierwotnej koncepcji tranzystora]; A --> C[Zaproponowanie zupełnie nowej architektury];
```

Udoskonalenie pierwotnej koncepcji tranzystora

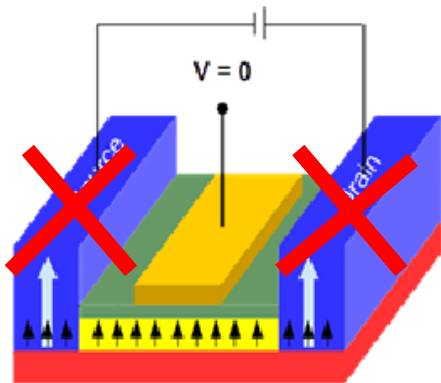
Zaproponowanie zupełnie nowej architektury

Tranzystor spinowy

Udoskonalenie pierwotnej koncepcji tranzystora

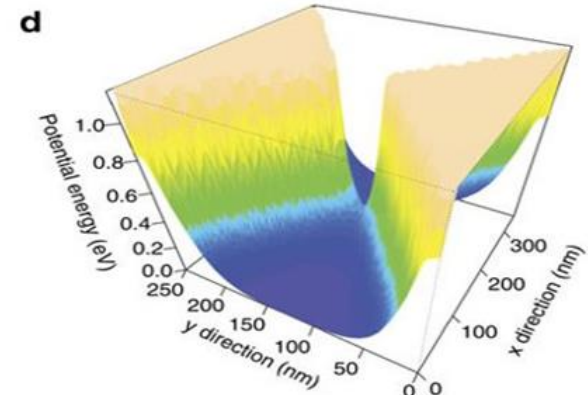
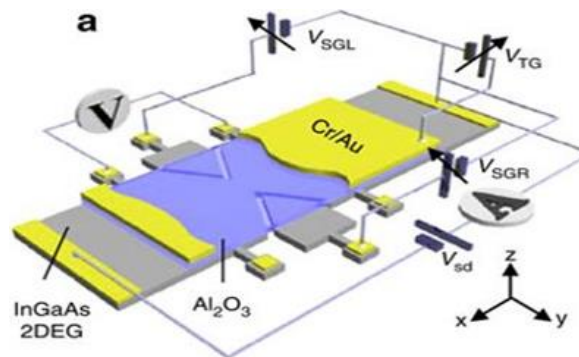
Zaproponowanie zupełnie nowej architektury

1. Problem z ferromagnetycznym kontaktem

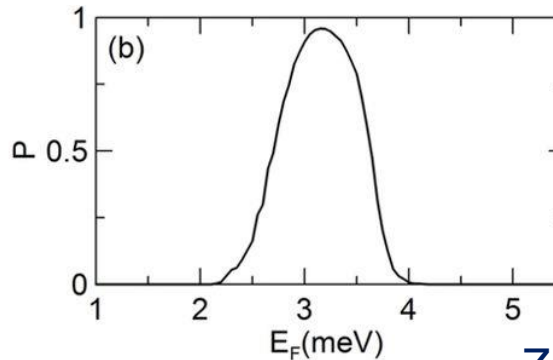
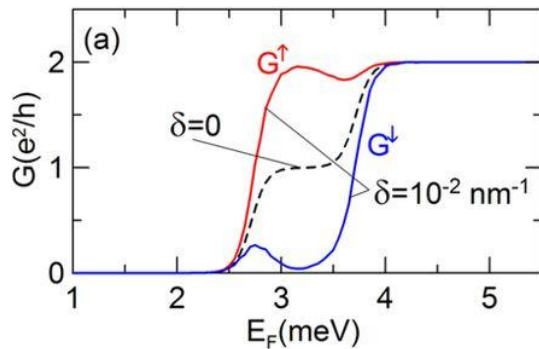
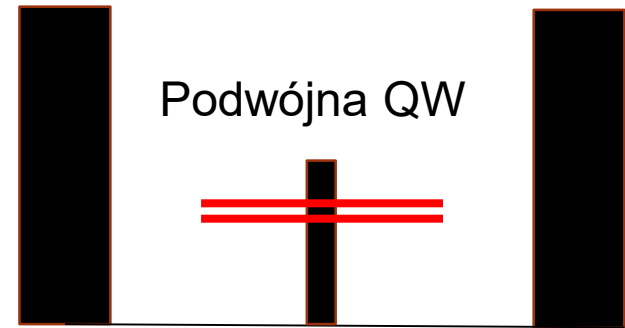
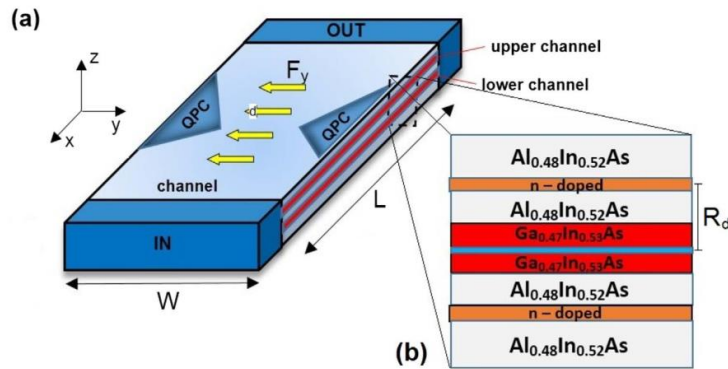


Źródło spinowo spolaryzowanych elektronów oparte na materiałach półprzewodnikowych sterowane zewnętrznym polem elektrycznym

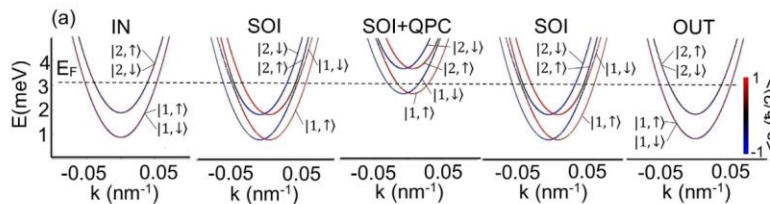
Filtry spinowe oparte na QPC



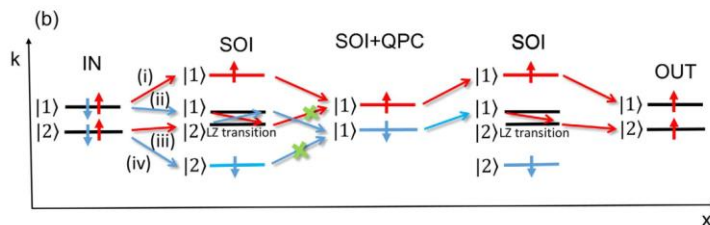
Filtr spinowy w dwuwarstwowym NW z QPC



Prawie 100% polaryzacja prądu



Zasada działania związana z hybrydyzacją stanów orbitalnych oraz przejściami międzypasmowymi

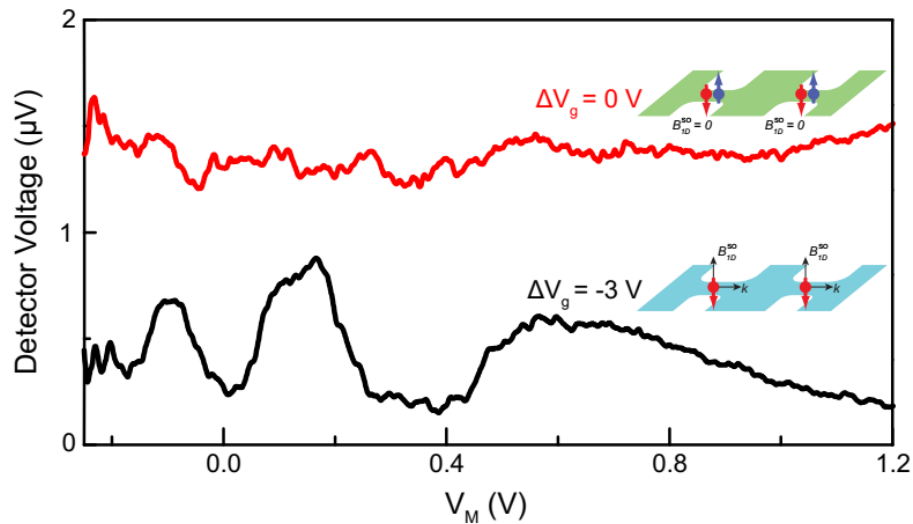
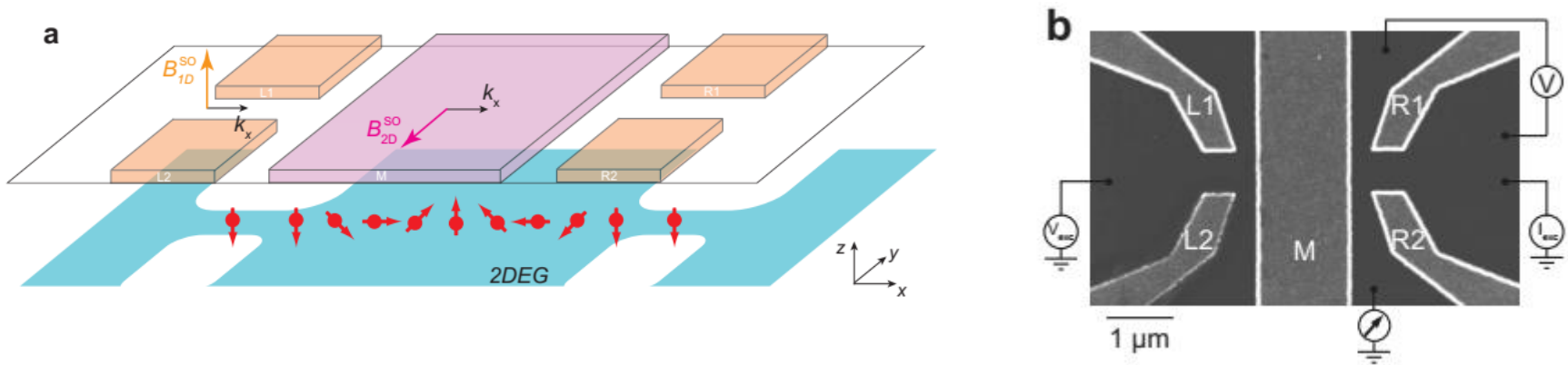


Zalety:

- ✓ Brak niedopasowania rezystancji
- ✓ Brak pola magnetycznego od kontaktów

Tranzystor spinowy z QPC - eksperyment

P. Chuang et al. Nature, 10, 35 (2015)



FM vs QPC:

1. Znacznie większy sygnał na wyjściu
2. Współczynnik G_{on}/G_{off} dwa rzędy wielkości razy większy dla QPC

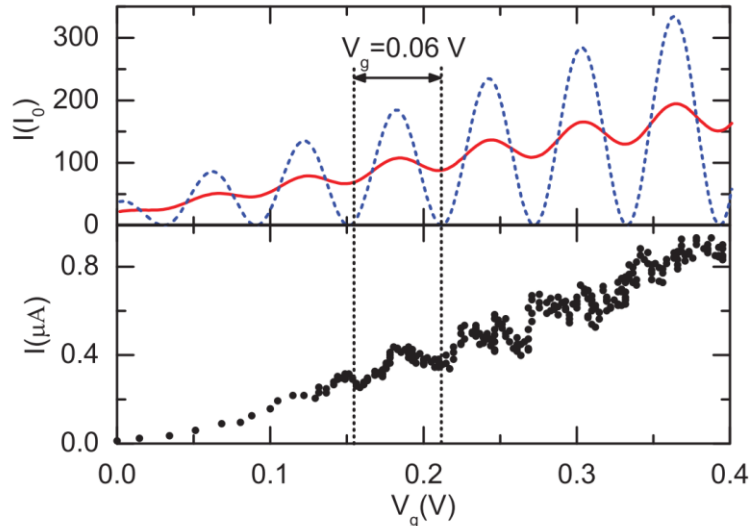
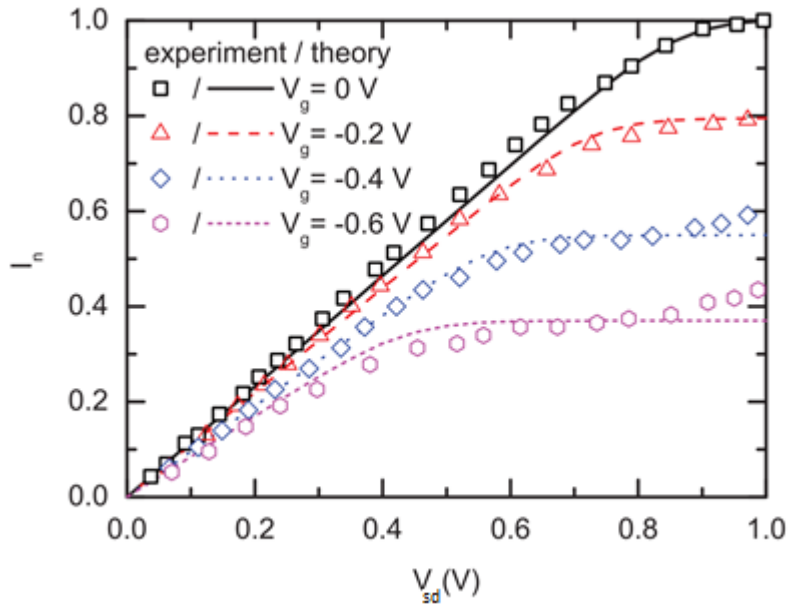
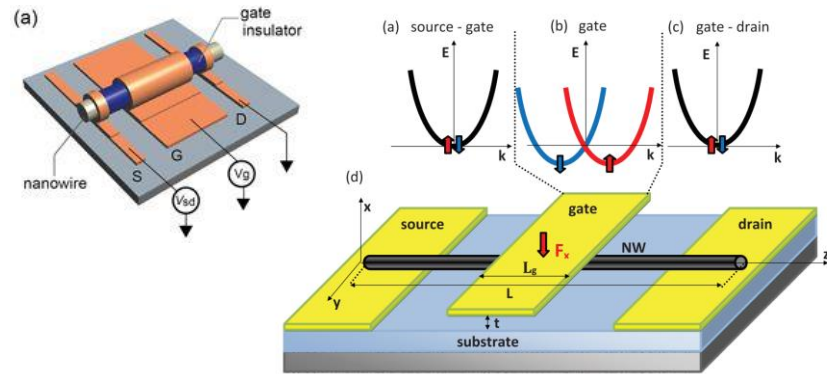
Tranzystor spinowy

Udoskonalenie pierwotnej koncepcji tranzystora

Zaproponowanie zupełnie nowej architektury

2. Problem relaksacji spinowej

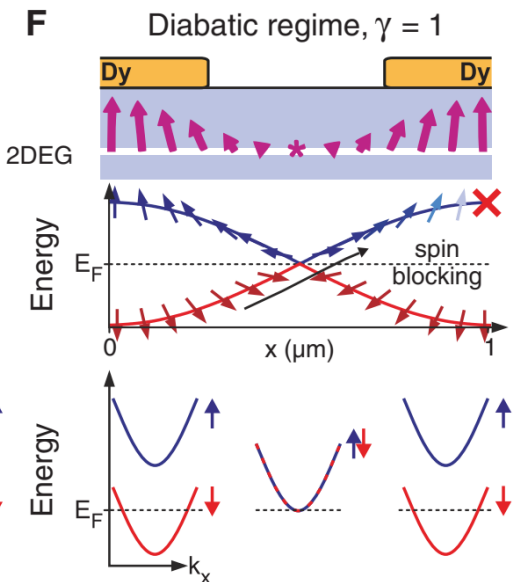
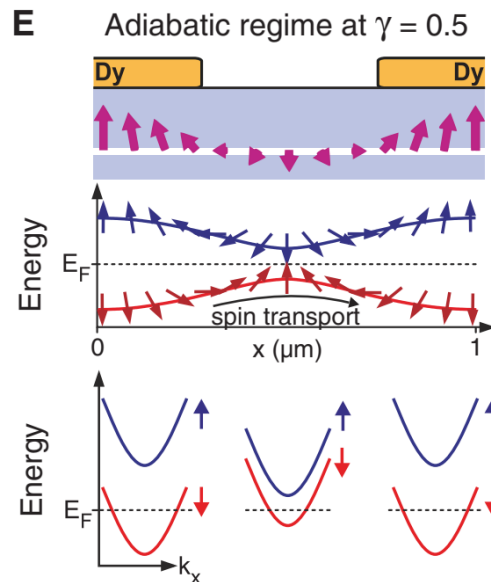
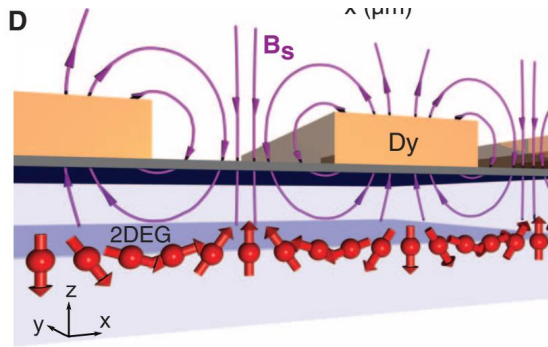
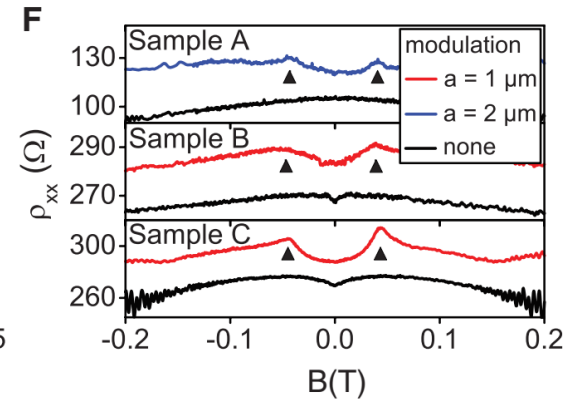
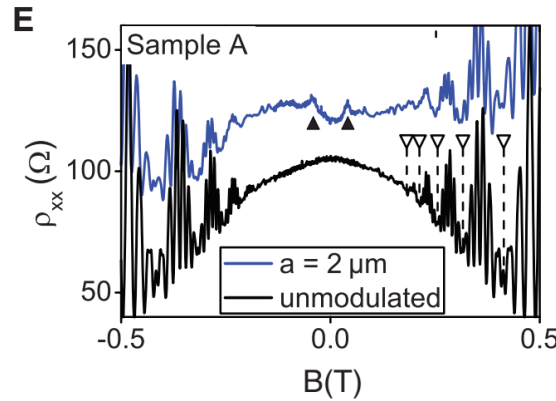
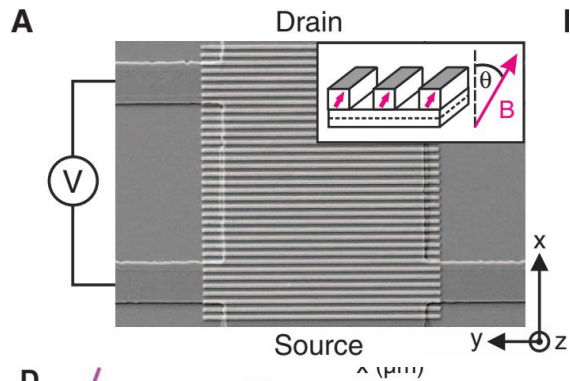
Ograniczenie relaksacji spinowej poprzez zastosowanie nanodrutów kwantowych



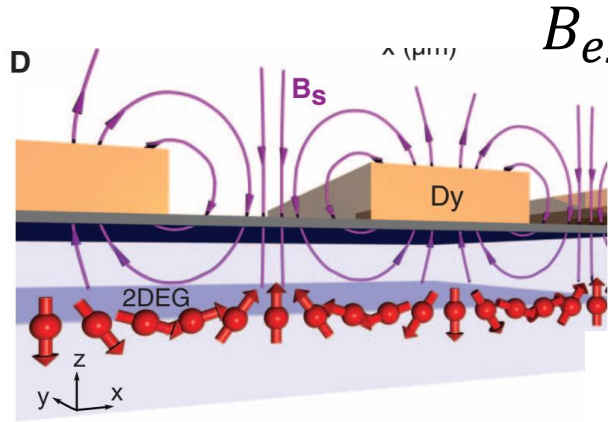
Tranzystor spinowy

Udoskonalenie pierwotnej koncepcji tranzystora

Zaproponowanie zupełnie nowej architektury



Tranzystor spinowy – nowa architektura



Pole od ferromagnetycznych pasków

$$\mathbf{B}_h(\mathbf{r}) = B_h \left(\sin \frac{2\pi x}{a}, 0, \cos \frac{2\pi x}{a} \right),$$

W zakresie adiabatycznym $\gamma = B_{ext}/B_h$

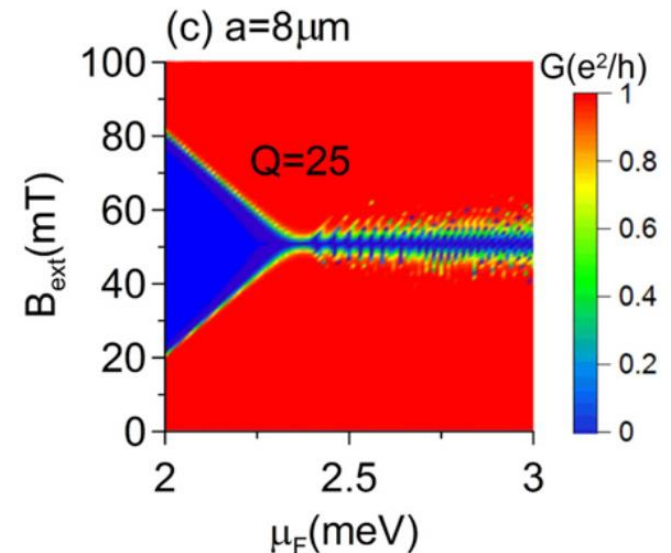
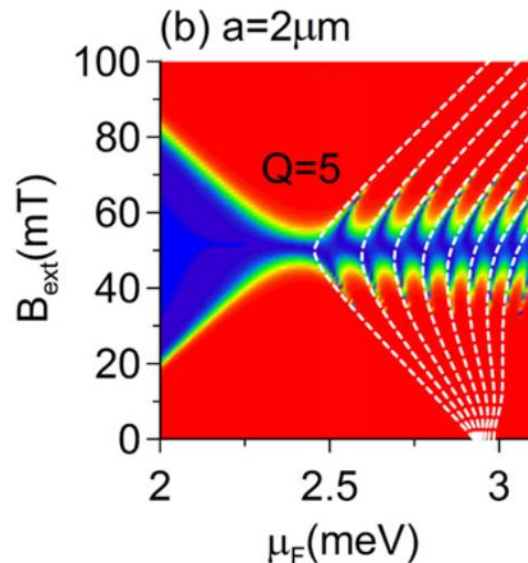
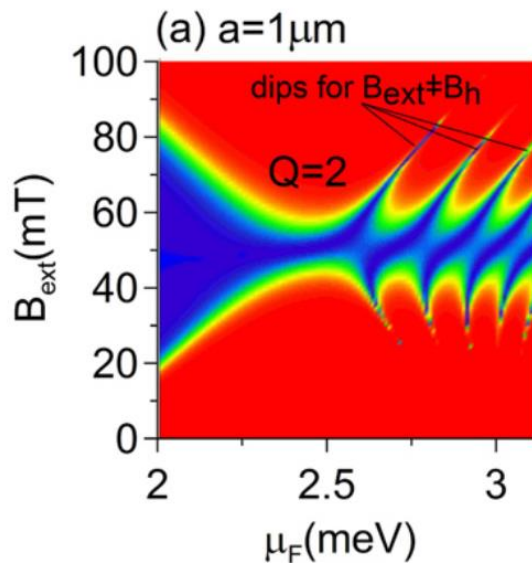
$$E^\pm(x) = \pm \frac{1}{2} g_{eff} \mu_B B_h \sqrt{1 + \gamma^2 + 2\gamma \cos(2\pi x/a)},$$

Parametr nieadiabatyczności

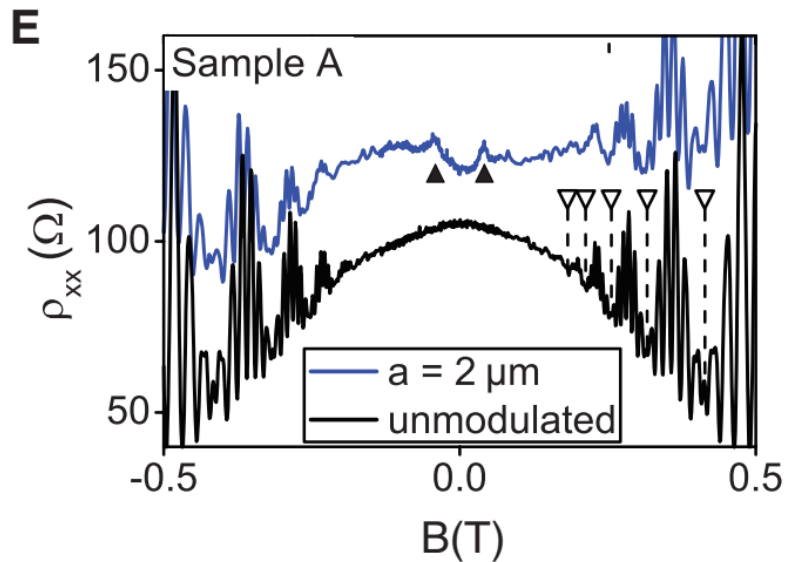
$$Q = \omega_L / \omega_{mod},$$

$$\omega_L = g_{eff} \mu_B B / \hbar$$

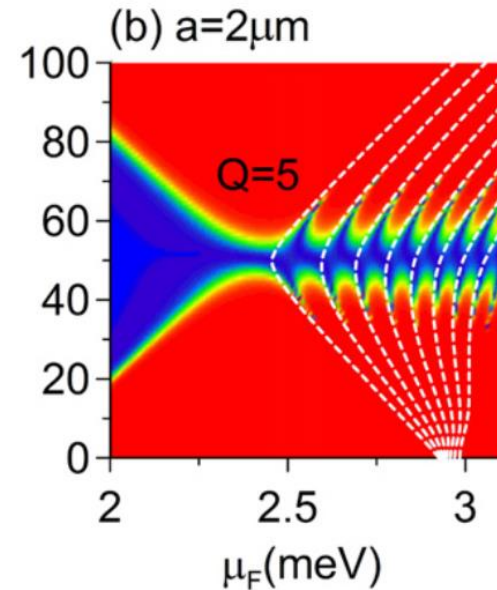
$$\omega_{mod} = 2\pi v_F / a$$



Eksperyment

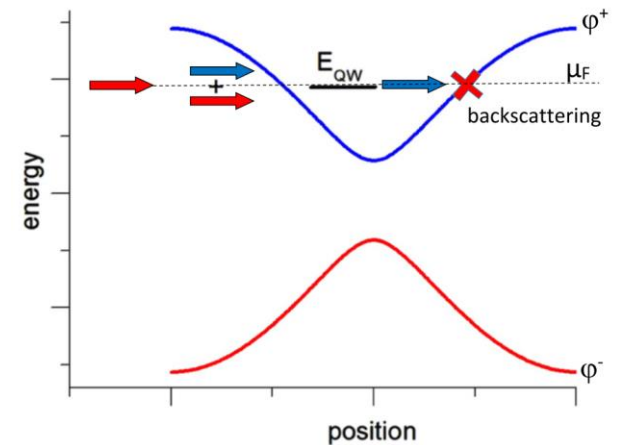
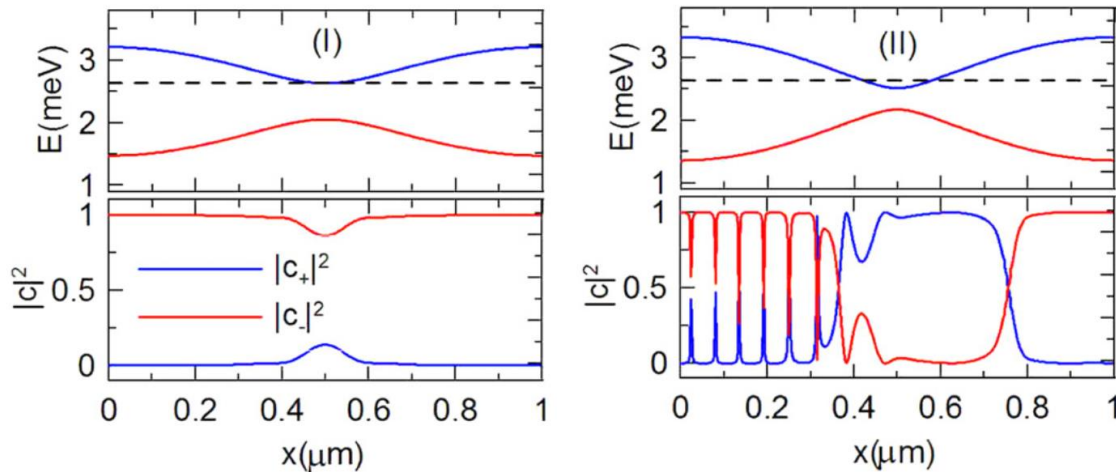


Teoria



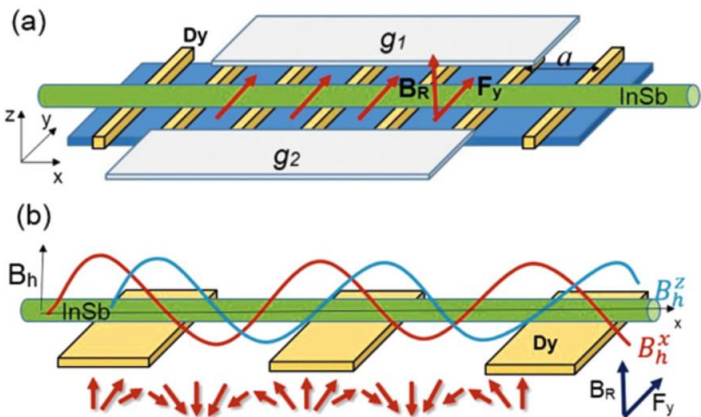
Rezonansowe przejścia Landaua-Zenera

$$\Psi(x, y) = c_+(x)\phi^+(y) + c_-(x)\phi^-(y),$$



Nowa architektura tranzystora spinowego

Wada: Akcja tranzystorowa indukowana zewnętrznym polem magnetycznym



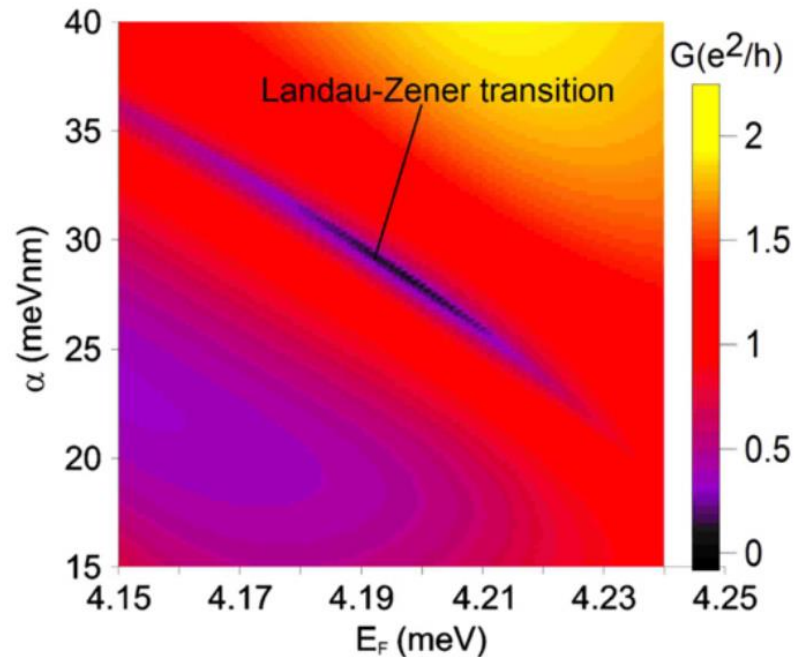
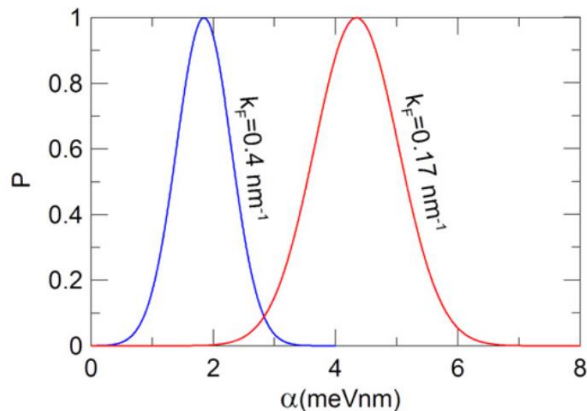
Zastąpmy pole magnetyczne efektywnym polem Rashby

$$E^{\pm}(x) = \pm \alpha k_x \sqrt{1 + \gamma^2 + 2\gamma \cos\left(\frac{2\pi(x - x_0)}{a}\right)},$$

$$\gamma = \frac{1}{2} g_{\text{eff}} \mu_B B_h / \alpha k_x$$

Prawdopodobieństwo przejść Landaua-Zenera

$$P = \exp\left(-\frac{2\pi}{\hbar^2} \frac{\varepsilon_{12}^2}{\beta}\right)$$



Podsumowanie:

1. Wyniki naszych obliczeń stałej oddziaływania Rashby zgadzają się z eksperymentem dla nanodrutów półprzewodnikowych
2. Oddziaływanie spin-orbita jest podstawą działania wielu urządzeń spintroniki opartych na materiałach półprzewodnikowych – tranzystory spinowe, filtry spinowe. W tym zakresie wyniki naszych obliczeń zgadzają się z eksperymentem

Dziękuję za uwagę!

Stany Majorany



W drugiej połowie lat 30. XX wieku włoski fizyk Ettore Majorana zaproponował, na podstawie teorii kwantowej, istnienie cząstek – fermionów, które są jednocześnie swoją własną antycząstką. Cząstki Majorany znajdowałyby się pośrodku między materią i antymaterią. (Wikipedia)

Stany Majorany w fizyce ciała stałego – nadprzewodniki

Quasicząstka $b = uc_{\uparrow}^{\dagger} + vc_{\downarrow}$

Stan Majorany $\gamma = uc_{\sigma}^{\dagger} + u^*c_{\sigma}$

- fractional (anyon) statistics

$$\hat{\gamma}_{i,n}^{\dagger} \hat{\gamma}_{i,n} = 1/2$$

Model Kitaeva

$$\mathcal{H}_{\text{chain}} = -\mu \sum_{i=1}^N n_i - \sum_{i=1}^{N-1} (tc_i^\dagger c_{i+1} + \Delta c_i c_{i+1} + \text{h.c.})$$

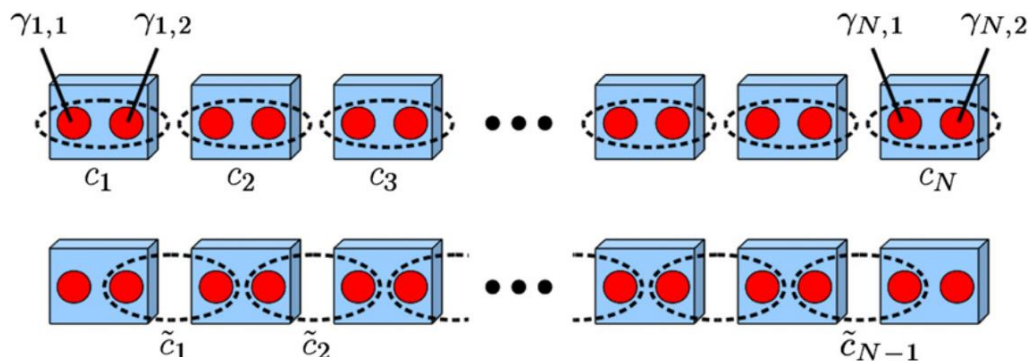
Operatory fermionowe

$$c_i = \frac{1}{2}(\gamma_{i,1} + i\gamma_{i,2}),$$

$$\gamma_{i,1} = c_i^\dagger + c_i,$$

$$c_i^\dagger = \frac{1}{2}(\gamma_{i,1} - i\gamma_{i,2}),$$

$$\gamma_{i,2} = i(c_i^\dagger - c_i),$$



$$\mu = 0, t = \Delta$$

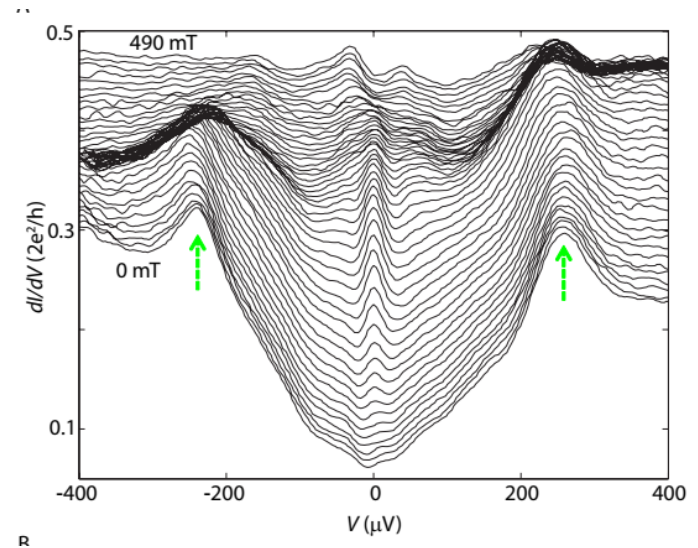
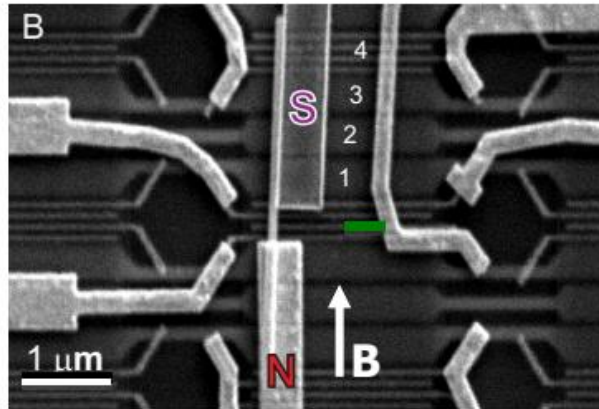
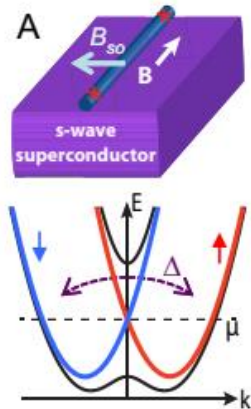
$$\mathcal{H}_{\text{chain}} = -it \sum_{i=1}^{N-1} \gamma_{i,2} \gamma_{i+1,1}.$$

$$\tilde{c}_i = (\gamma_{i+1,1} + i\gamma_{i,2})/2.$$

$$\mathcal{H}_{\text{chain}} = 2t \sum_{i=1}^{N-1} \tilde{c}_i^\dagger \tilde{c}_i. \quad \text{Stan Majorany} \quad \tilde{c}_M = (\gamma_{N,2} + i\gamma_{1,1})/2.$$

Stany Majorany z układach hybrydowych NW/SC

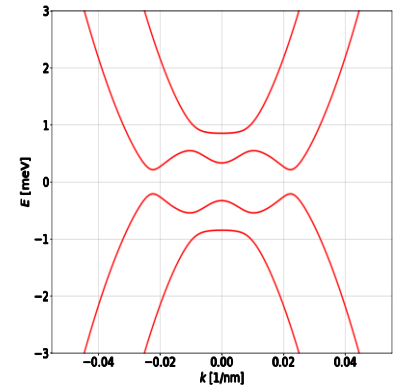
V. Mourik, et al. *Science*, 336, 1003 (2012)



Realization in a quasi-one dimensional wire:

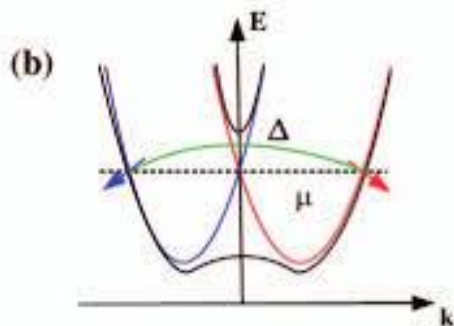
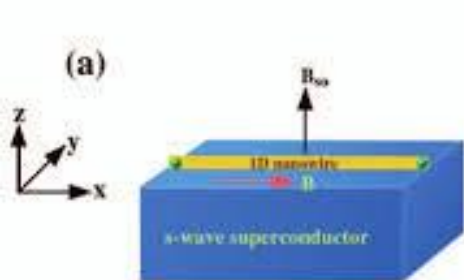
1. Quasi-one dimensional system (nanowire)
2. Spin-orbit interaction
3. Magnetic field (Zeeman effect)
4. Electron – hole symmetry
5. Electron – hole coupling

$$H = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m^*} \tau_z$$



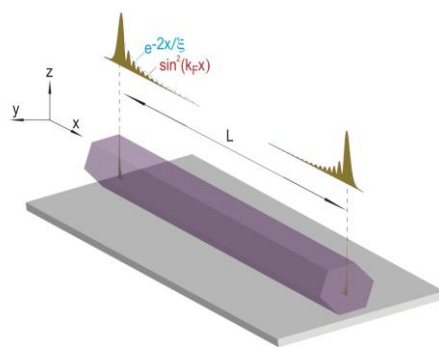
Stany Majorany w układach hybrydowych

Hamiltonian
$$H = (\hbar^2 \mathbf{k}^2 / 2m^* - \mu) \sigma_0 \tau_z + \Delta \sigma_0 \tau_x + \alpha (\sigma_x k_y - \sigma_y k_x) \tau_z + E_z \sigma_z \tau_0,$$

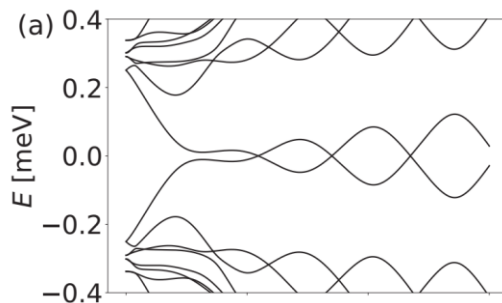
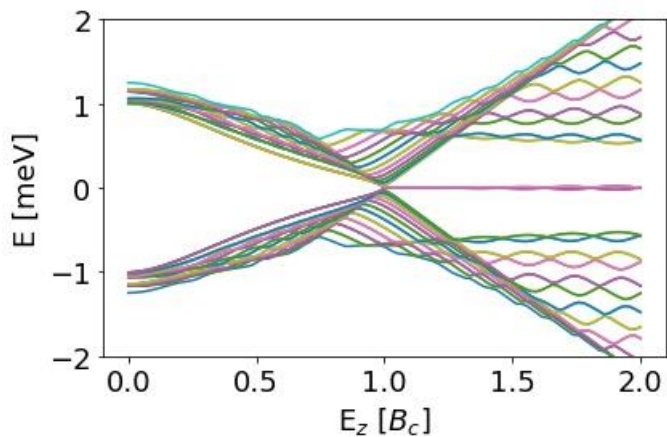
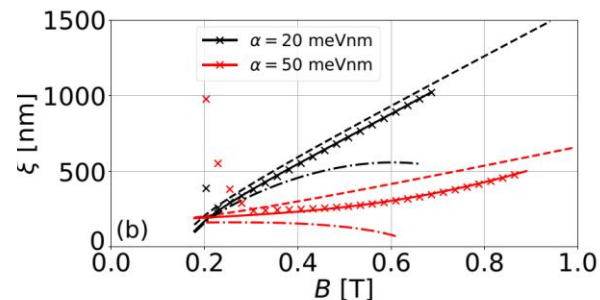
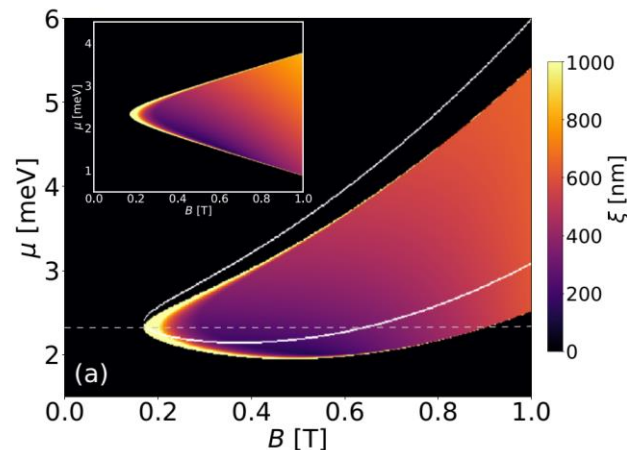


Widmo energetyczne

$$B_c = \sqrt{\Delta^2 + \mu^2}$$



Efekty orbitalne



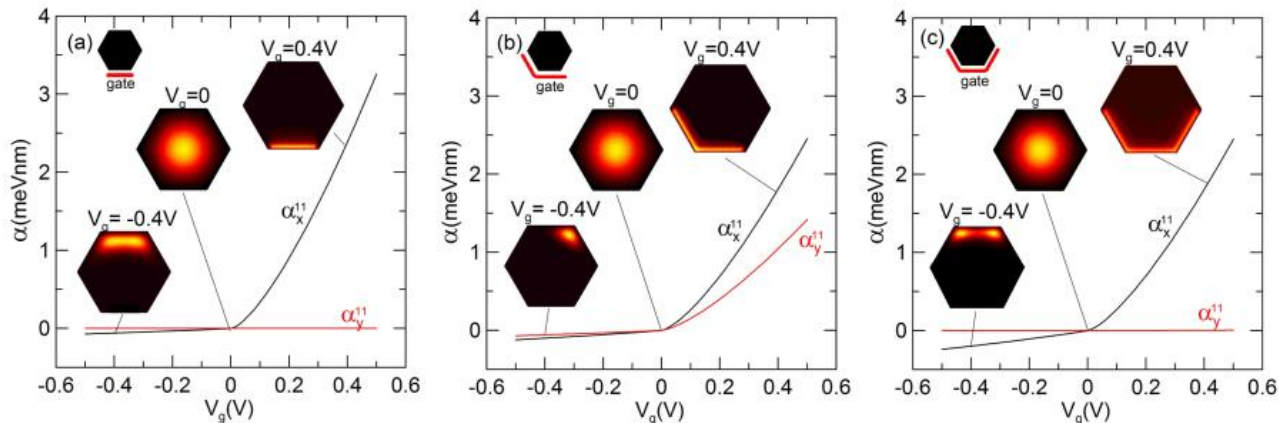
Podsumowanie:

1. Wyniki naszych obliczeń stałej oddziaływania Rashby zgadzają się z eksperymentem dla nanodrutów półprzewodnikowych
2. Oddziaływanie spin-orbita jest podstawą działania wielu urządzeń spintroniki opartych na materiałach półprzewodnikowych – różne modele tranzystorów spinowych
3. Możliwość tworzenia stanów Majorany w nanodrutach z silnym oddziaływaniem SO

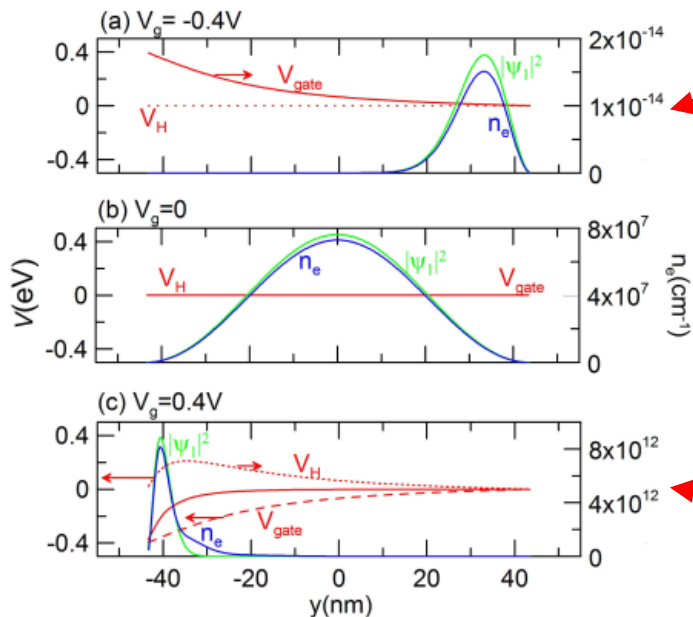
Dziękuję za uwagę!

Results for GaAs (high mobility)

Ideal gate configuration – gates are attached directly to NW
(upper bound for SOC)



Bottom gate



- ✓ charge depletion
- ✓ e – e interaction is negligible
- ✓ α depends only on the gate voltage

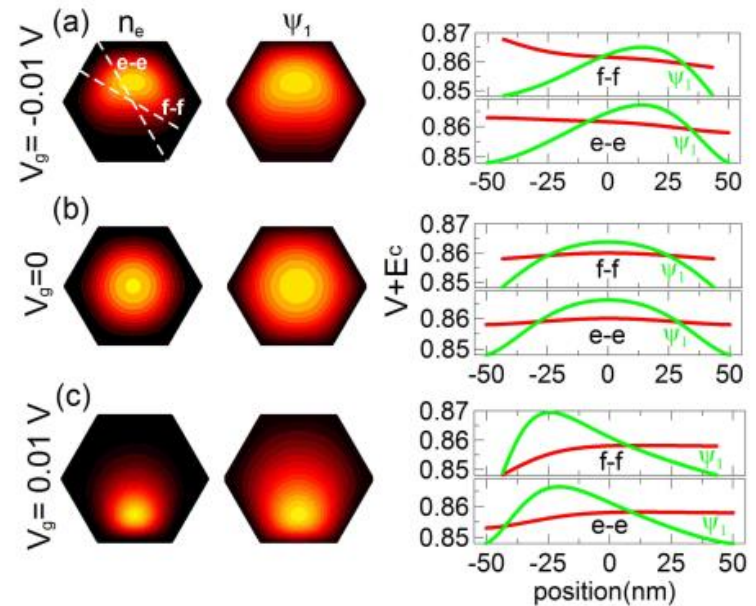
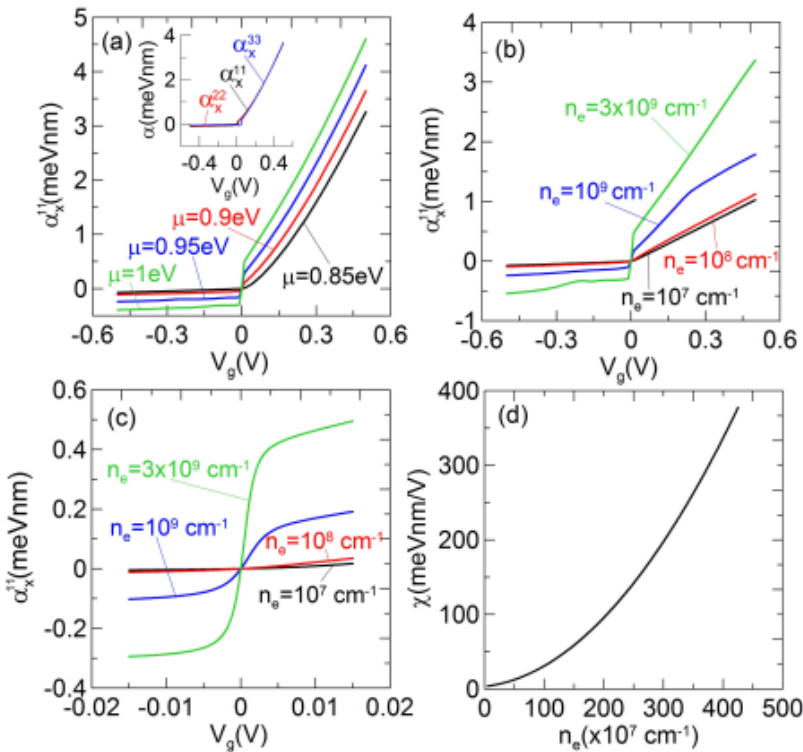
- ✓ symmetric case
- ✓ due to the symmetry, $\alpha = 0$

- ✓ charge doping
- ✓ e-e interaction determines SOC

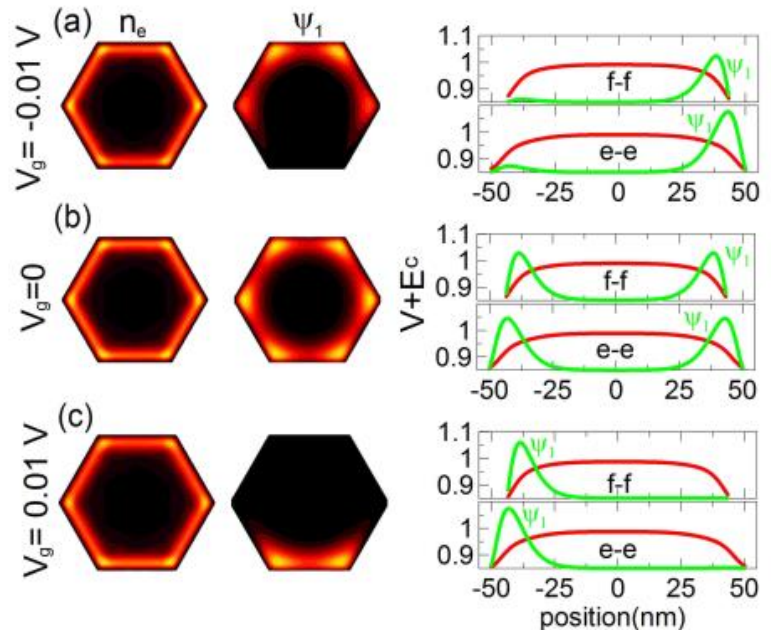
Results for GaAs

P. W., G. Goldoni, A. Bertoni, arXiv:1801.09905

Low electron concentration $n_e = 10^7 \text{ cm}^{-3}$



High electron concentration $n_e = 3 \times 10^9 \text{ cm}^{-3}$



Rashba SOI in NW

- ✓ In high concentration regime the e-e interaction dominates – accumulation near facets
- ✓ Nonlinear electric field susceptibility

$$\chi = \frac{d\alpha}{dV_g}(V_g = 0)$$

- ✓ Analogy to the coupled quantum wells

R. S. Calsaverini, et al. PRB, 78, 155313 (2008)

Results for InSb – experiment (2)

ARTICLE

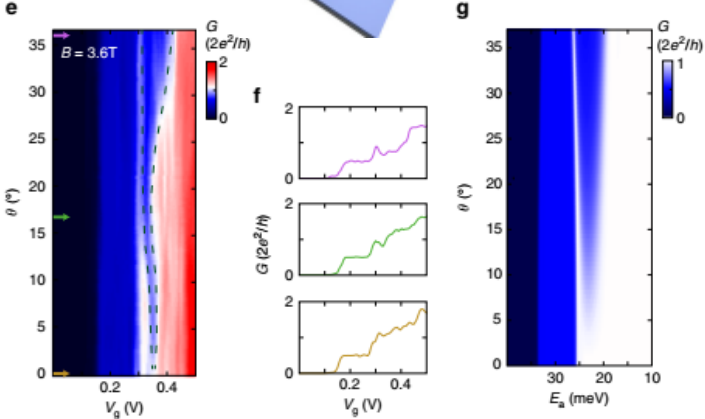
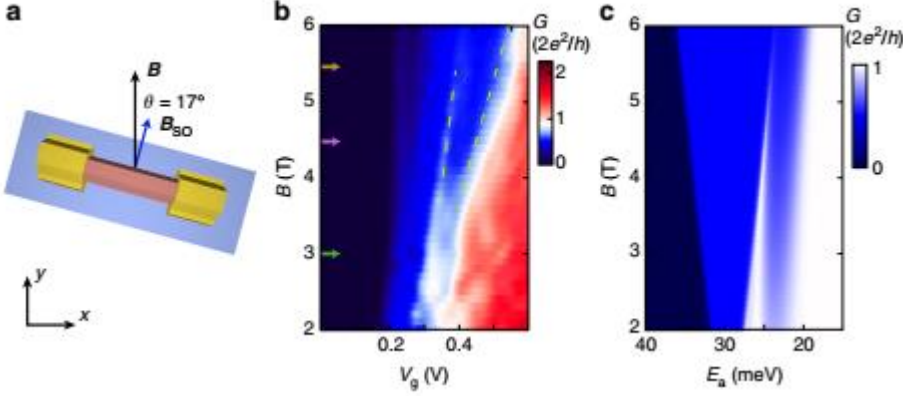
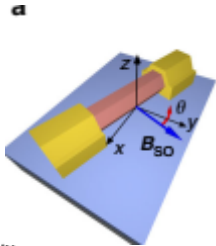
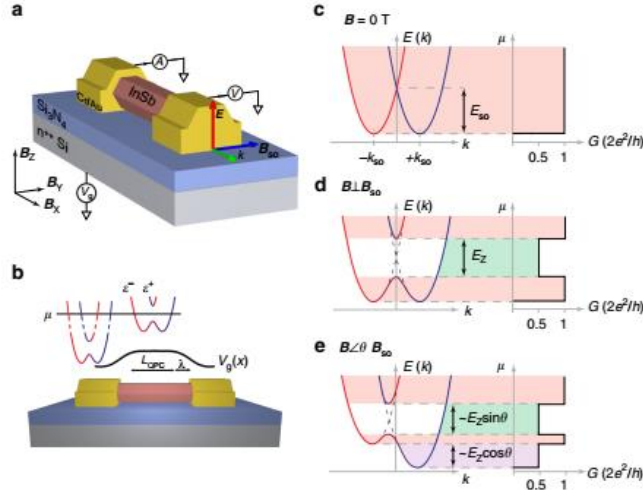
DOI: 10.1038/s41467-017-00315-y

OPEN

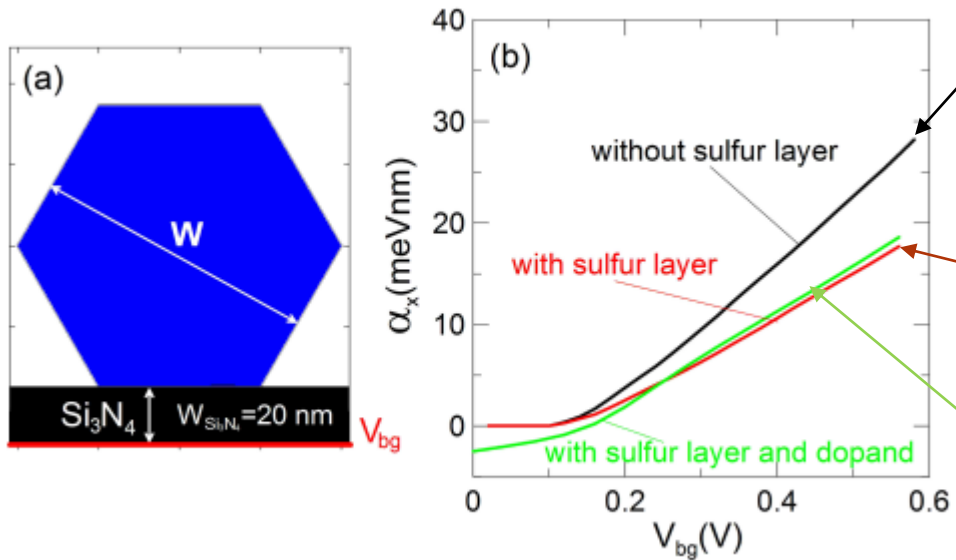
Conductance through a helical state in an Indium antimonide nanowire

J. Kammhuber¹, M.C. Cassidy¹, F. Pei¹, M.P. Nowak^{1,2}, A. Vuik¹, Ö. Gül¹, D. Car^{1,3}, S.R. Plissard^{1,4}, E.P.A.M. Bakkers^{1,3}, M. Wimmer¹ & L.P. Kouwenhoven¹

The motion of an electron and its spin are generally not coupled. However in a one-dimensional material with strong spin-orbit interaction (SOI) a helical state may emerge at finite magnetic fields, where electrons of opposite spin will have opposite momentum. The existence of this helical state has applications for spin filtering and cooper pair splitter devices and is an essential ingredient for realizing topologically protected quantum computing using Majorana zero modes. Here, we report measurements of a quantum point contact in an indium antimonide nanowire. At magnetic fields exceeding 3 T, the $2e^2/h$ conductance plateau shows a re-entrant feature toward $1e^2/h$ which increases linearly in width with magnetic field. Rotating the magnetic field clearly attributes this experimental signature to SOI and by comparing our observations with a numerical model we extract a spin-orbit energy of approximately 6.5 meV, which is stronger than the spin-orbit energy obtained by other methods.



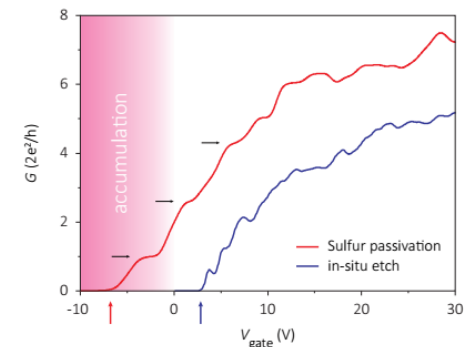
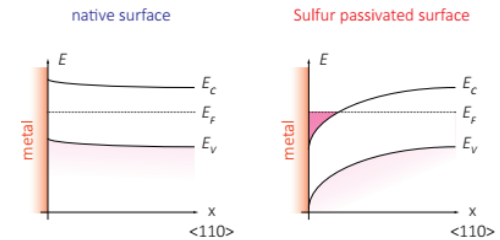
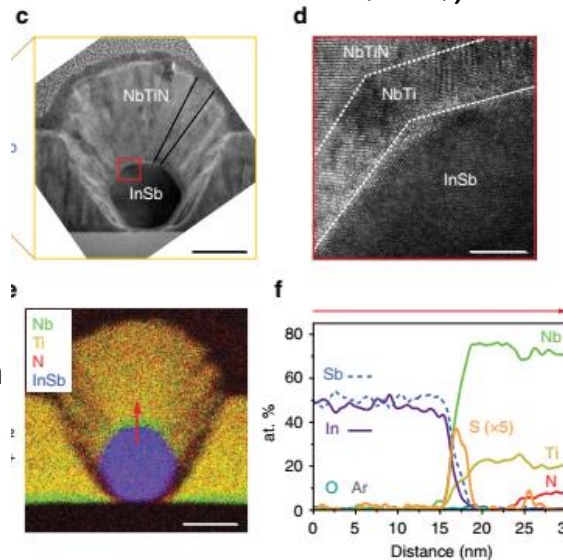
Results for InSb – experiment (2)



- ✓ nine times lower than reported in the experiment
- ✓ 5 nm sulphur layer does not increase SOC
- ✓ Even with dopand SOC is still lower than in the experiment

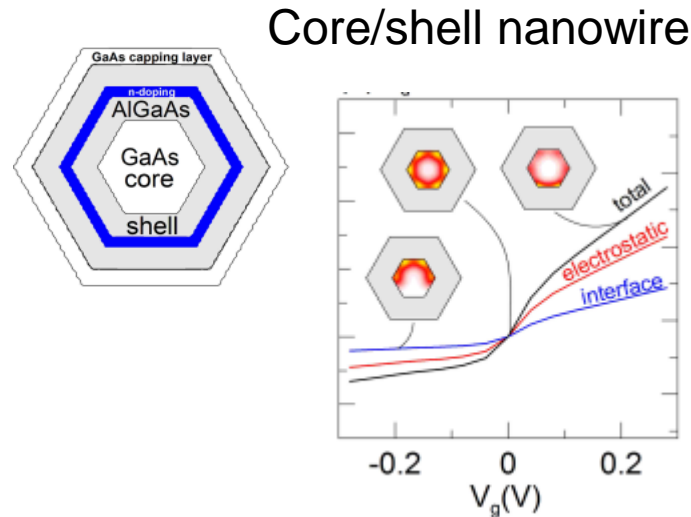
Nabrication proces (H. Zhang et al. Nat. Commun. 8, 16025 (2017))

- ✓ Passivation with sulfur-based solution (immersed in sulfur-rich ammonium sulfide)
- ✓ Sulfur at the surface bend the conduction band pins the Fermi energy creating an electron rich nanowire surface

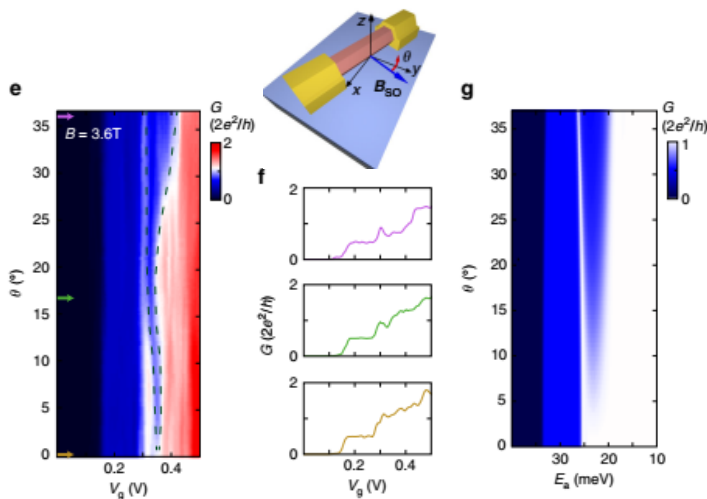


Results for InSb – experiment (2) (possible explanation)

1. Sulfur layer – SOC from interfaces (core/shell nanowire)



2. Overestimation of SOC due to the orbital effects



Fitting by the single electron model **without orbital effect**

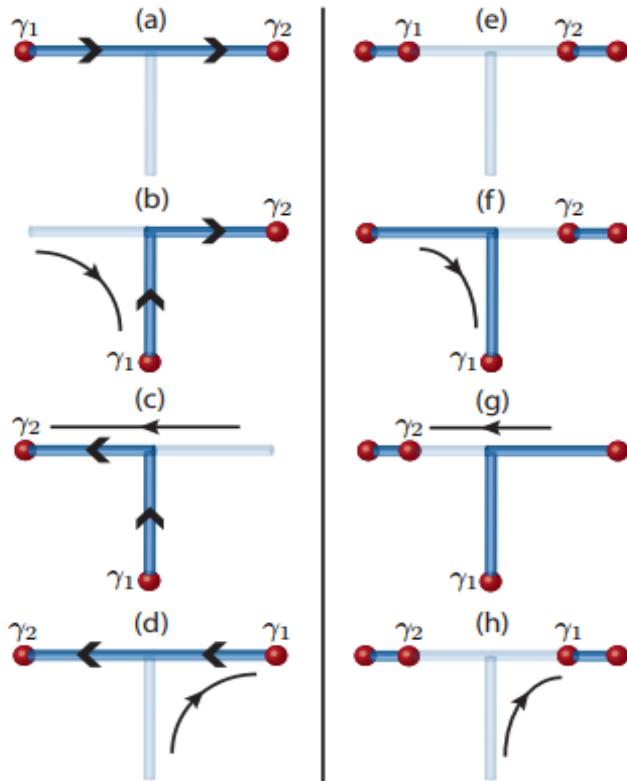
$$H = \frac{p^2}{2m^*} + \frac{\alpha}{\hbar} p\sigma_y + \frac{1}{2} E_Z (\sin(\theta)\sigma_x + \cos(\theta)\sigma_y) .$$

Orbital effects in Majorana nanowire

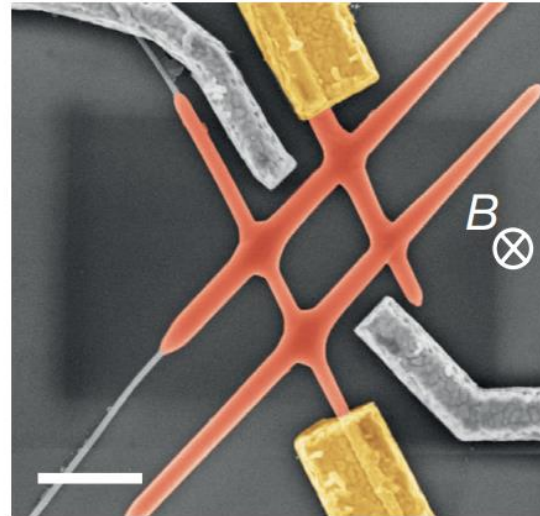
Towards topological quantum gates: multiterminal devices

Perpendicular field necessary for braiding

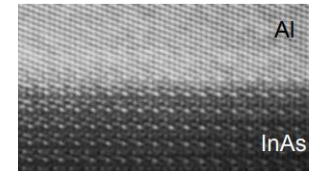
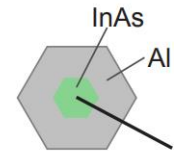
Orbital effects



J. Alicea, et al., Nature Physics (2010)



S. Gazibegovic, et al., Nature (2017)

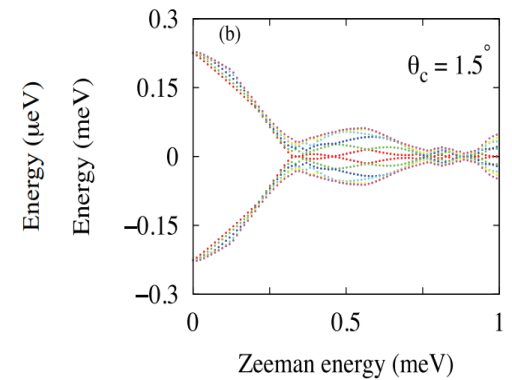
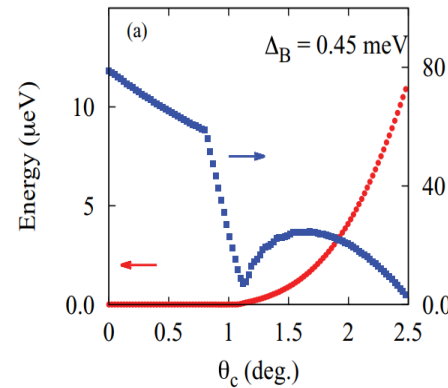
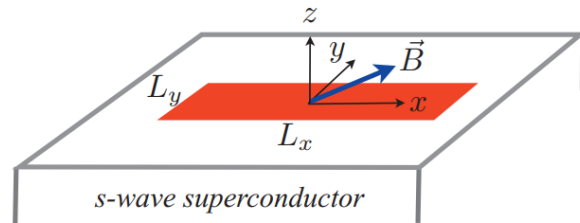


W. Chang, et al., Nature Nano (2015)

Wires covered by Al shell, We describe unavoidable orbital effects of the field

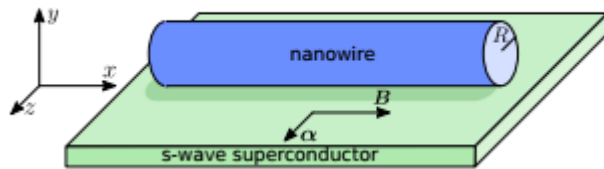
Orbital effects – Majorana killer ?

- J. S. Lim et al. PRB (2012)



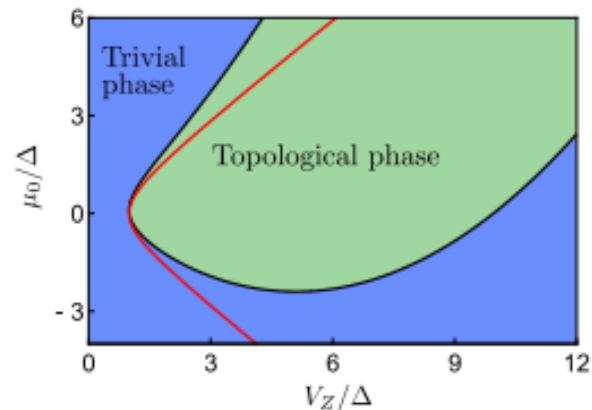
We conclude that even in the single Majorana mode regime, magnetic orbital effects lead to the destruction of those modes.

- O. Dmytruk, J. Klinovaja, arXiv:1710.01671 (2017)



Shifting the chemical potential

$$\mu = \mu_0 - \beta \left(\frac{\phi}{\phi_0} \right)^2$$



Orbital effects – Majorana killer ?

M. Nowak, P.W., PRB, 97, 045419 (2018)

Hamiltonian of the structure

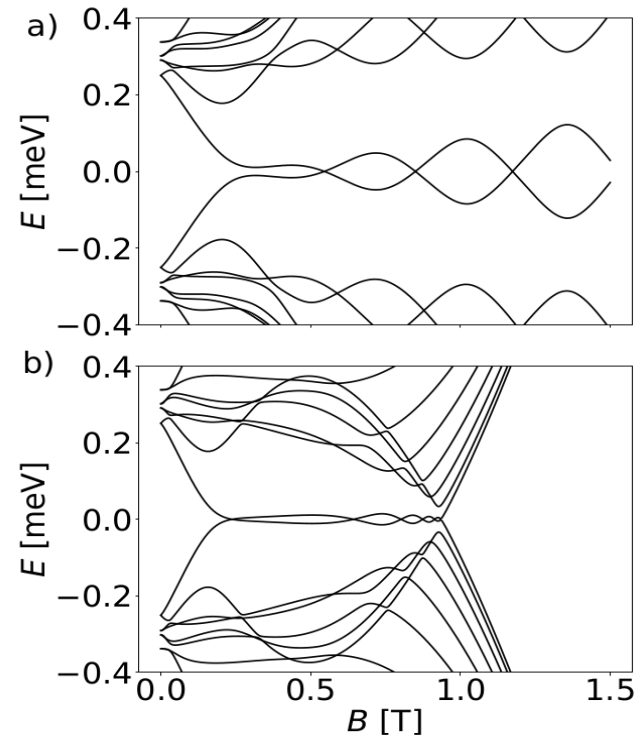
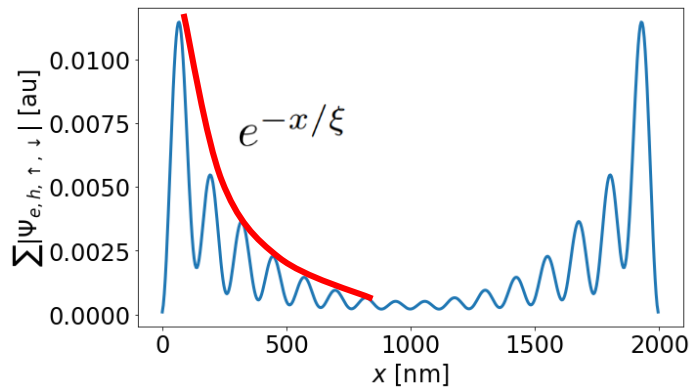
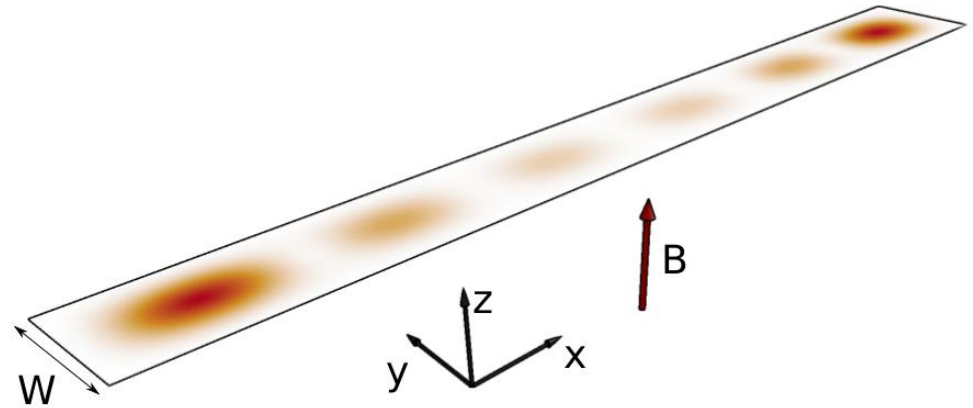
$$H = (\hbar^2 \mathbf{k}^2 / 2m^* - \mu) \sigma_0 \tau_z + \Delta \sigma_0 \tau_x + \alpha (\sigma_x k_y - \sigma_y k_x) \tau_z + E_z \sigma_z \tau_0.$$

$$\mathbf{k} = -i\nabla + e\mathbf{A}/\hbar \cdot \tau_z$$

$$\mathbf{A} = [-yB, 0, 0]$$

$$(k_x + \frac{eA_x}{\hbar})^2 \rightarrow k_x^2 + \sim y^2 B^2 - \sim k_x y B$$

$$\alpha(k_x + \frac{eA_x}{\hbar})\sigma_y \rightarrow \alpha k_x \sigma_y - \sim \alpha y B \sigma_y$$



Majorana fermions in perpendicular magnetic field

We rewrite into basis of states orthogonal to B direction

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \quad \text{with}$$

$$H_{11(22)} = H_{1D} + (E_{1(2)} + E_{1(2)}^{\text{dia}})\sigma_0\tau_z,$$

$$H_{12} = H_{21} = \varepsilon_p k_x \sigma_0 \tau_0 + E_p^{\text{SO}} \sigma_y \tau_0 + E_{\perp}^{\text{SO}} \sigma_x \tau_z$$

Using folding-down approach we obtain renormalization of the parameters:

$$\frac{1}{\tilde{m}^*} = \frac{1}{m^*} - \frac{2\varepsilon_p^2}{\hbar^2 E_2}$$

$$\tilde{\mu} = \mu - E_1 - E_1^{\text{dia}} + \frac{(E_p^{\text{SO}} - E_{\perp}^{\text{SO}})^2}{E_2},$$

$$\tilde{\alpha} = \alpha + 2 \frac{E_p^{\text{SO}} \varepsilon_p}{E_2}.$$

$$H_{1D} = \left(\frac{\hbar^2 k_x^2}{2m^*} - \mu \right) \sigma_0 \tau_z + \Delta \sigma_0 \tau_x - \alpha k_x \sigma_y \tau_z + E_Z \sigma_z \tau_0.$$

Decay length given by: (Das Sarma, PRB (2012))

$$\xi \simeq \frac{1}{\tilde{\alpha}\Delta} \sqrt{\left(\frac{\hbar^2}{\tilde{m}^*} \tilde{\mu} + \tilde{\alpha}^2 \right)^2 + \left(\frac{\hbar^2}{\tilde{m}^*} \right)^2 (E_z^2 - \Delta^2 - \tilde{\mu}^2)}$$

