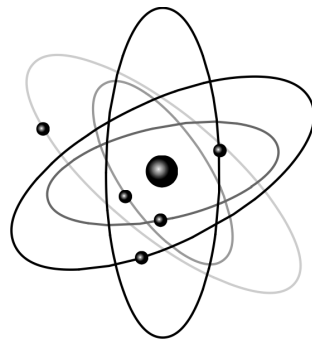


Dynamika relacji społecznych

Maciej Wołoszyn



Seminarium
WFiIS AGH

13 maja 2022

Podziękowania

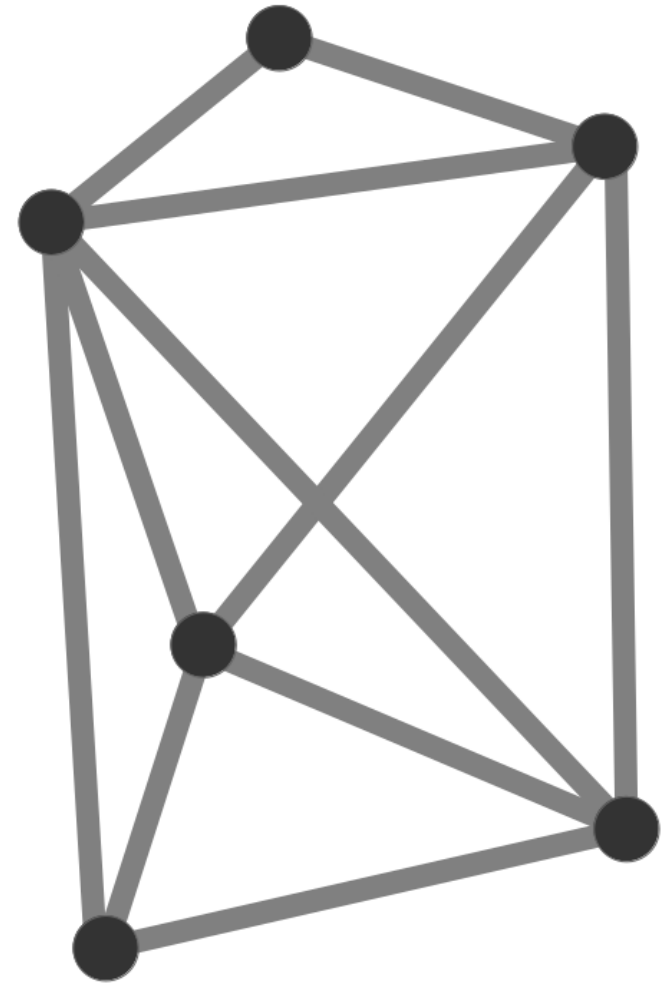
→ Krzysztof Kułakowski → Krzysztof Malarz

Streszczenie

- modelowanie relacji i sieci społecznych
- triady jako podstawowy element pozwalający na analizę tzw. *równowagi Heidera*
- deterministyczna i stochastyczna ewolucja układu
- znaczenie struktury sieci relacji
- wyniki dla różnych sieci: od regularnych do przypadkowych

Model sieci społecznej

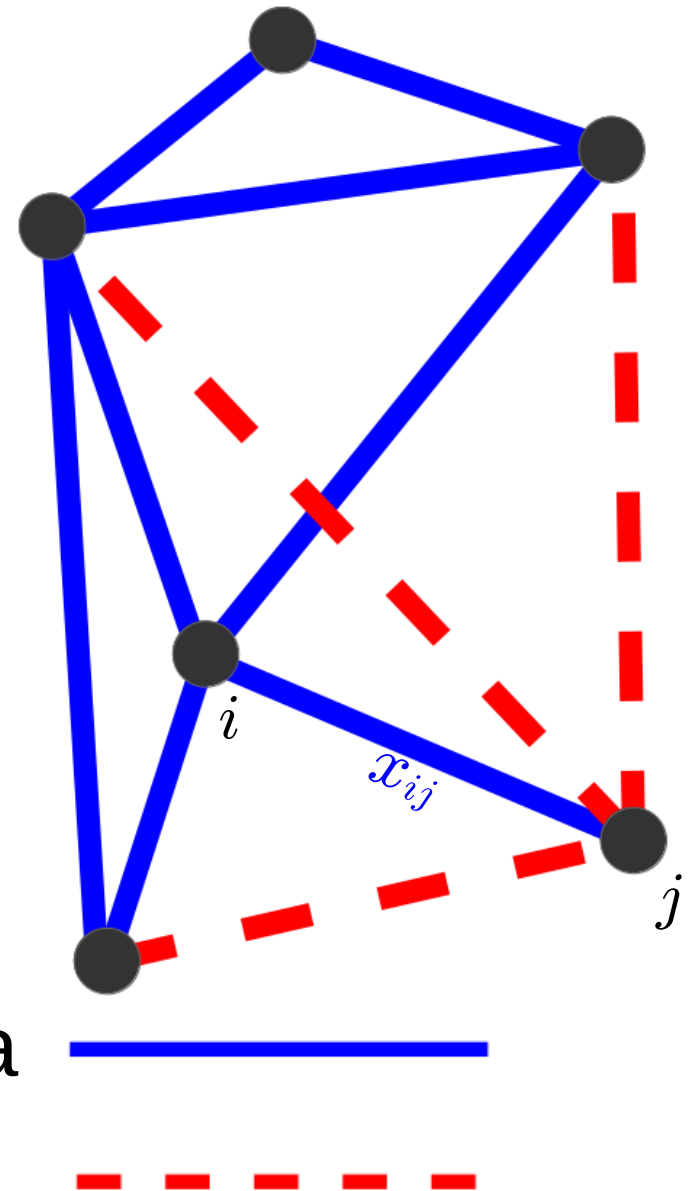
- **osoby** = **węzły** grafu
 - $i = 1, \dots, N$
- **relacje** między parami osób = **krawędzie** grafu łączące odpowiednie węzły



Model sieci społecznej

- **osoby** = **węzły** grafu
 - $i = 1, \dots, N$
- **relacje** między parami osób = **krawędzie** grafu łączące odpowiednie węzły (L – liczba połączeń)
- krawędziom przypisane są wartości $x_{ij} =$

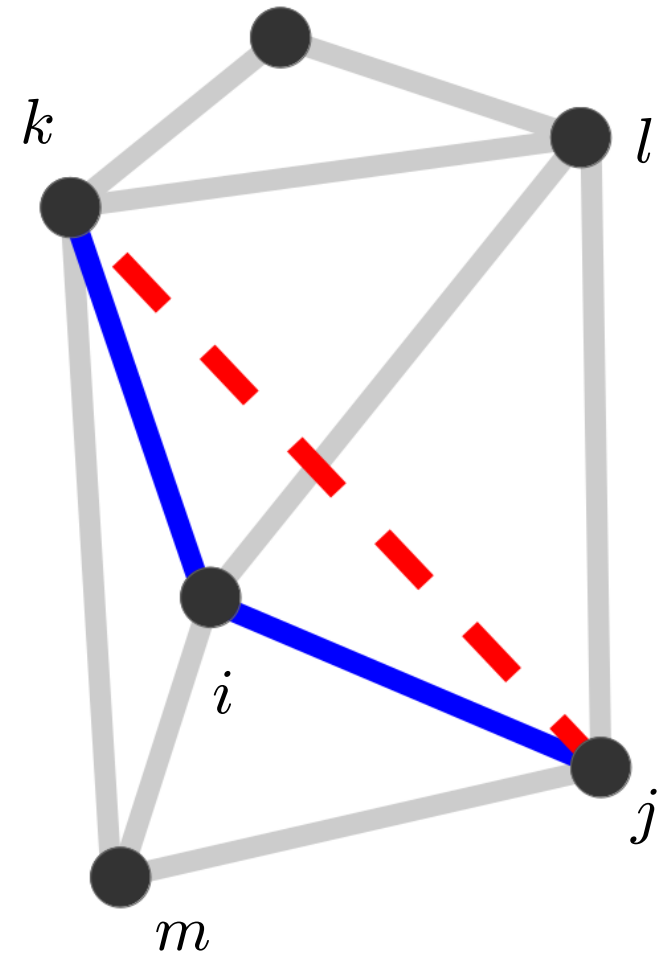
- +1** → relacja przyjazna
- 1** → relacja wroga



symetryczne

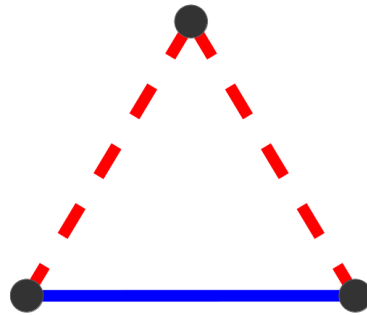
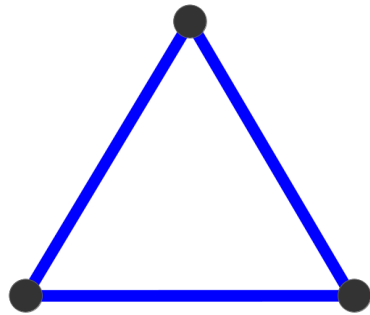
Triady

- **ocena relacji** odbywa się poprzez odniesienie do relacji ze „wspólnymi znajomymi”
→ **triady**
(np. dla kształtowania się relacji x_{ij} istotne będą triady ijk, ijl, ijm)
- każda triada = 3 relacje
(ijk to x_{ij}, x_{ik}, x_{jk})



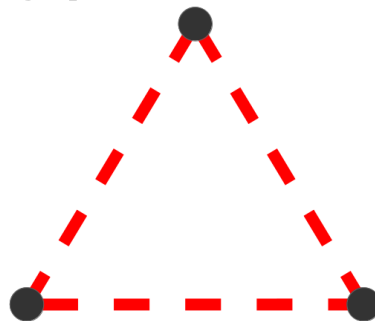
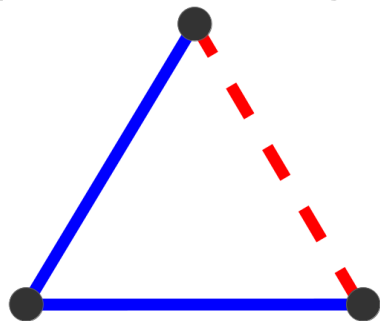
Równowaga Heidera w triadzie

- występuje gdy spełnione są następujące warunki:
 - przyjaciel mojego przyjaciela jest moim przyjacielem
 - wróg mojego przyjaciela jest moim wrogiem
 - przyjaciel mojego wroga jest moim wrogiem
 - wróg mojego wroga jest moim przyjacielem



$$x_{ij}x_{ik}x_{jk} = +1$$

- w przeciwnym wypadku: dysonans → brak równowagi

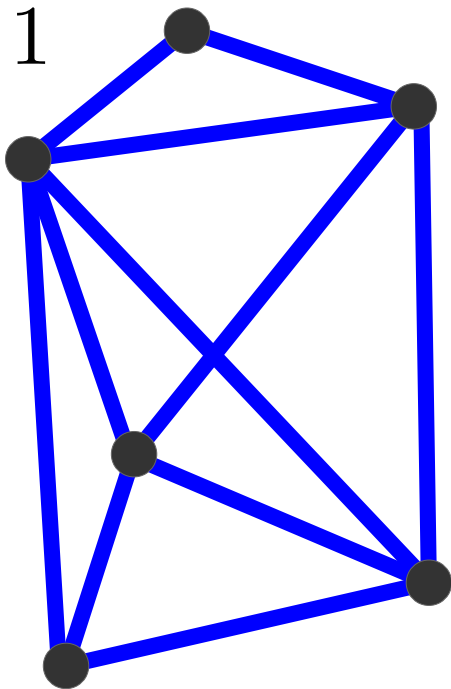


$$x_{ij}x_{ik}x_{jk} = -1$$

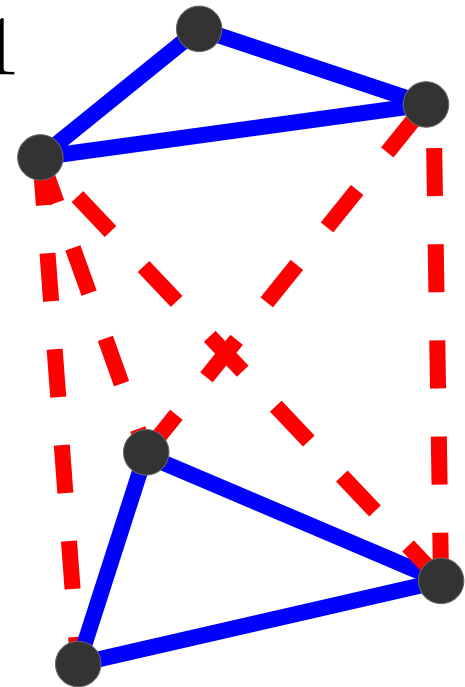
Równowaga całego układu

- układ znajduje się w równowadze jeśli **wszystkie triady są w równowadze**
- dwie możliwości:
 - 1) „raj”
 - 2) „wrogie kliki”

$$\langle x_{ij} \rangle = 1$$



$$\langle x_{ij} \rangle < 1$$



Równowaga całego układu

- układ znajduje się w równowadze jeśli **wszystkie triady są w równowadze**

- dwie możliwości:

1) „raj”

2) „wrogie kliky” $\langle x_{ij} \rangle < 1$

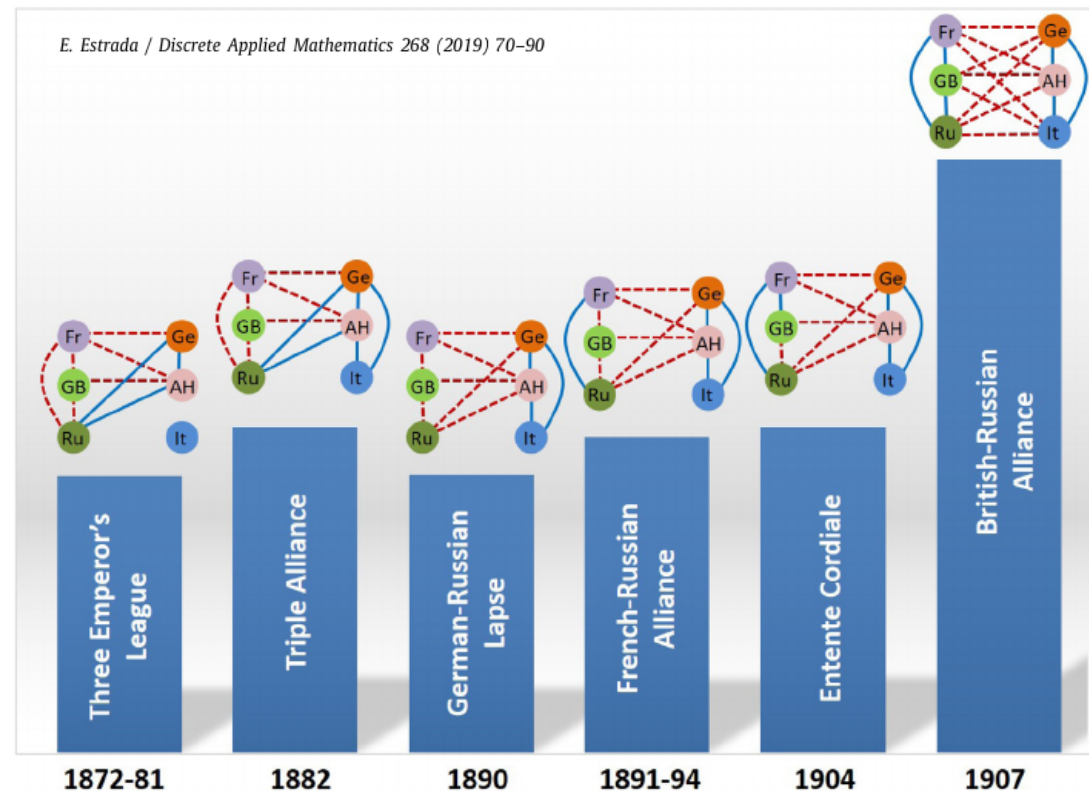


Fig. 6.1. Degree of balance K among the six main European powers at six different times between 1872 and 1907.

Równowaga całego układu

- układ znajduje się w równowadze jeśli **wszystkie triady są w równowadze**

- dwie możliwości:

1) „raj”

2) „wrogie klikie” $\langle x_{ij} \rangle < 1$

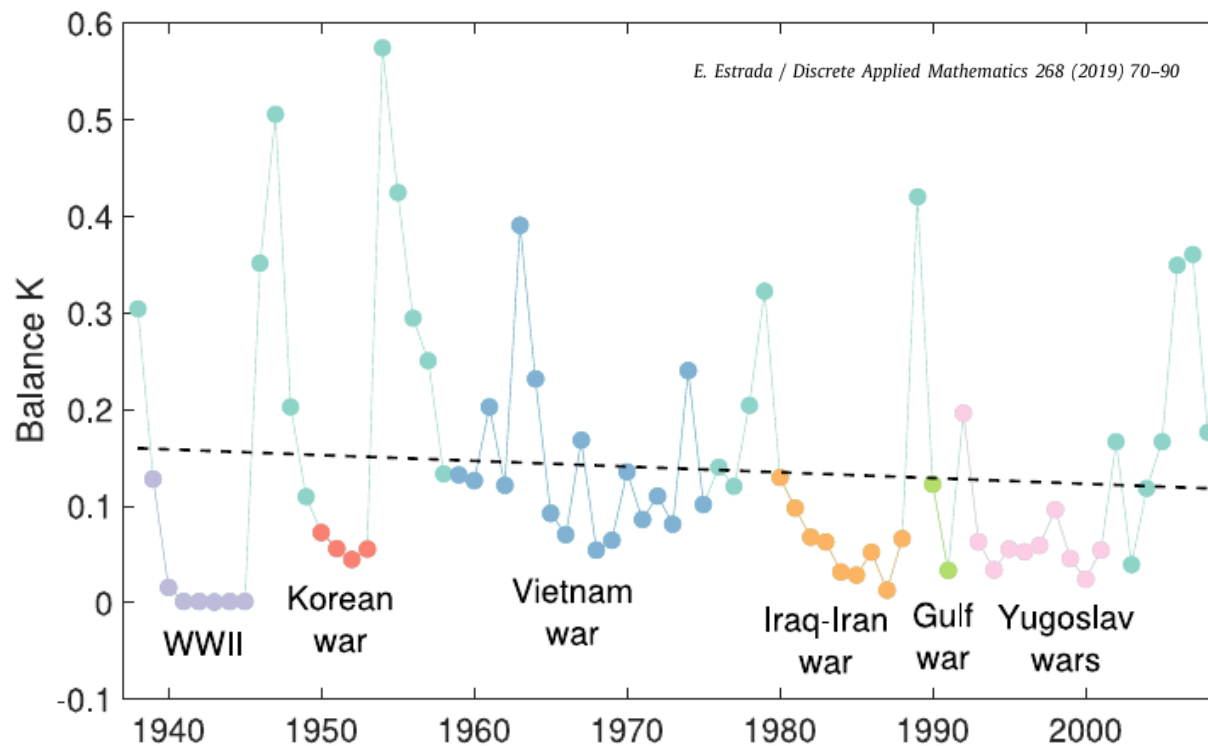


Fig. 6.2. Degree of balance K among the world countries for a period of 70 years between 1938 and 2008. The broken line represents the main trend of the global degree of balance K . We have colored in different colors some of the main international wars during this period. (For interpretation of the references to color in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)

Równowaga całego układu

- wszystkie triady w równowadze

$$\Rightarrow \forall_{i,j,k} x_{ij}x_{ik}x_{jk} = +1$$

- wygodna miara pozwalająca wykryć **stan równowagi** (lub pokazać jak blisko/daleko jest do niego):

$$U = -1$$

$$U = - \frac{\sum x_{ij}x_{ik}x_{jk}}{\Delta}$$

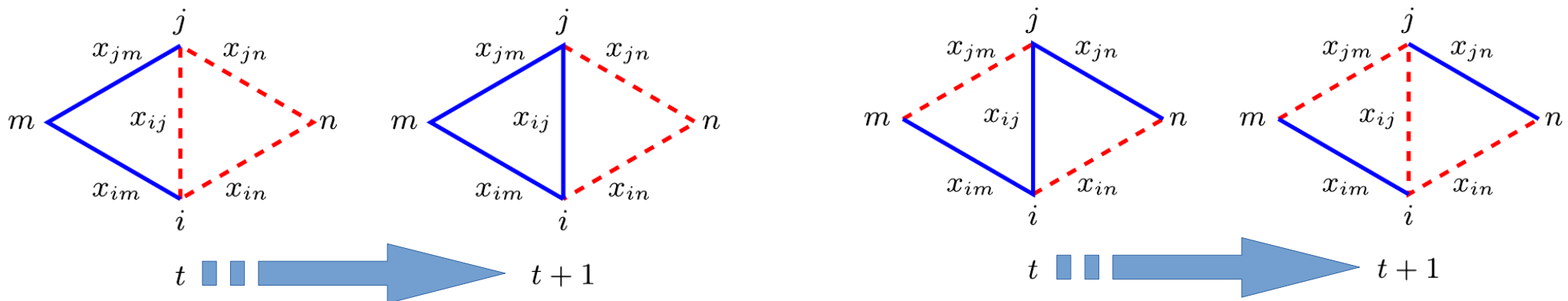
gdzie $\Delta = \sum |x_{ij}x_{ik}x_{jk}|$ – liczba triad

Deterministyczna ewolucja sieci relacji

- dążenie do równowagi poprzez zmiany relacji
- dynamika zdefiniowana poprzez

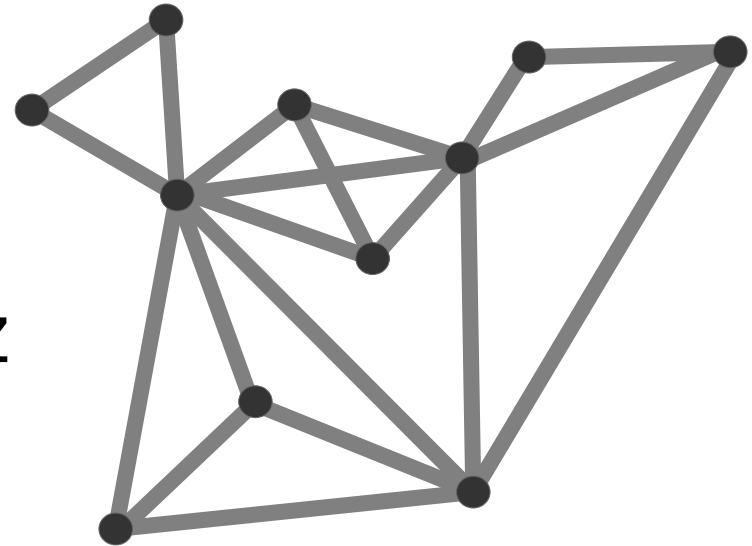
$$x_{ij}(t + 1) = \begin{cases} \text{sgn} [\xi_{ij}(t)] & \text{dla } \xi_{ij}(t) \neq 0, \\ x_{ij}(t) & \text{dla } \xi_{ij}(t) = 0, \end{cases}$$

$$\xi_{ij}(t) = x_{im}(t)x_{jm}(t) + x_{in}(t)x_{jn}(t)$$



Struktura sieci

- dla dużych układów nie można się spodziewać występowania relacji „każdym z każdym”, bardziej realistyczne są inne niż graf pełny rodzaje sieci



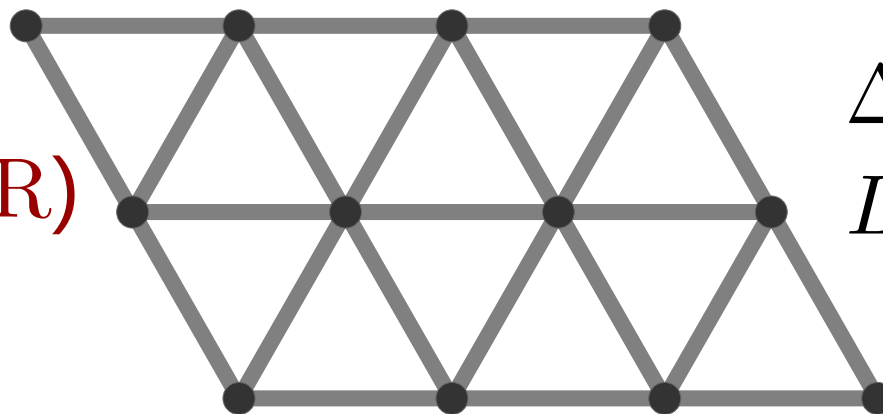
- jak możliwość osiągnięcia równowagi zależy od rodzaju sieci?**

na początek:

sieć trójkątna (TR)

periodyczne

warunki brzegowe



$$\Delta_{\text{TR}} = 2N$$

$$L_{\text{TR}} = 3N$$

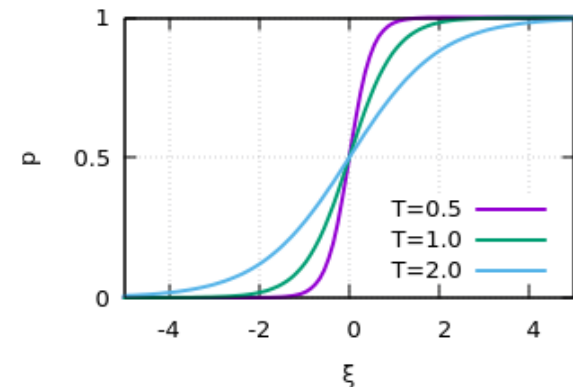
Ewolucja stochastyczna i „szum termiczny”

- dążenie do równowagi Heidera oraz równowagi termicznej

$$x_{ij}(t+1) = \begin{cases} +1 & \text{z prawdop. } p_{ij}(t), \\ -1 & \text{z prawdop. } [1 - p_{ij}(t)], \end{cases}$$

$$p_{ij}(t) = \frac{\exp[\xi_{ij}(t)/T]}{\exp[\xi_{ij}(t)/T] + \exp[-\xi_{ij}(t)/T]}$$

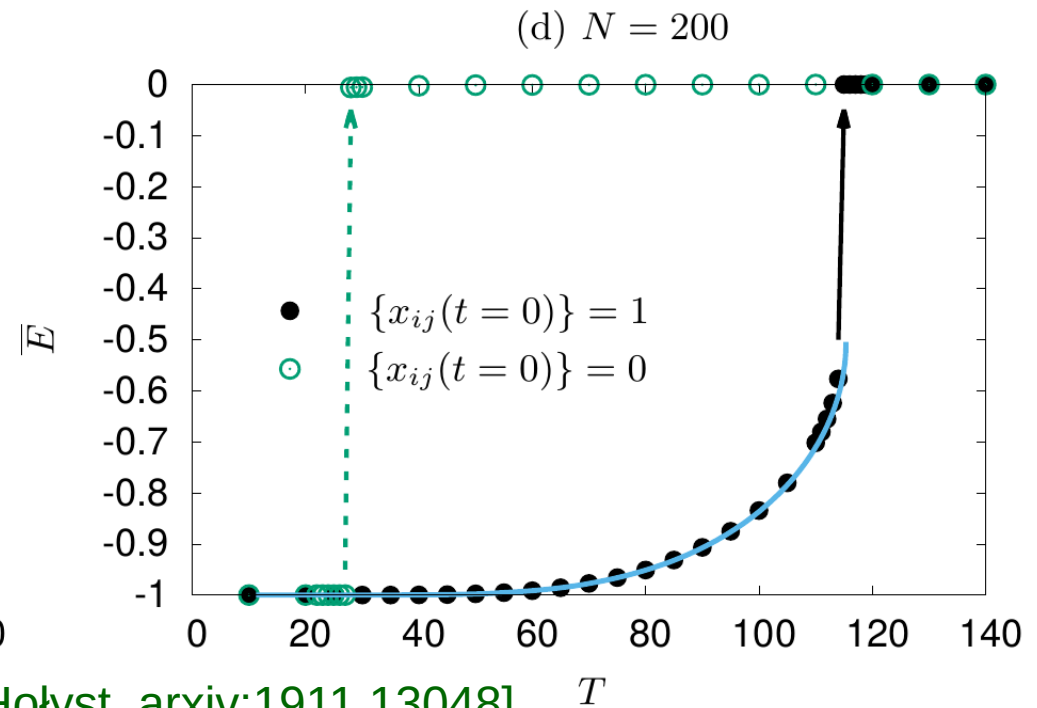
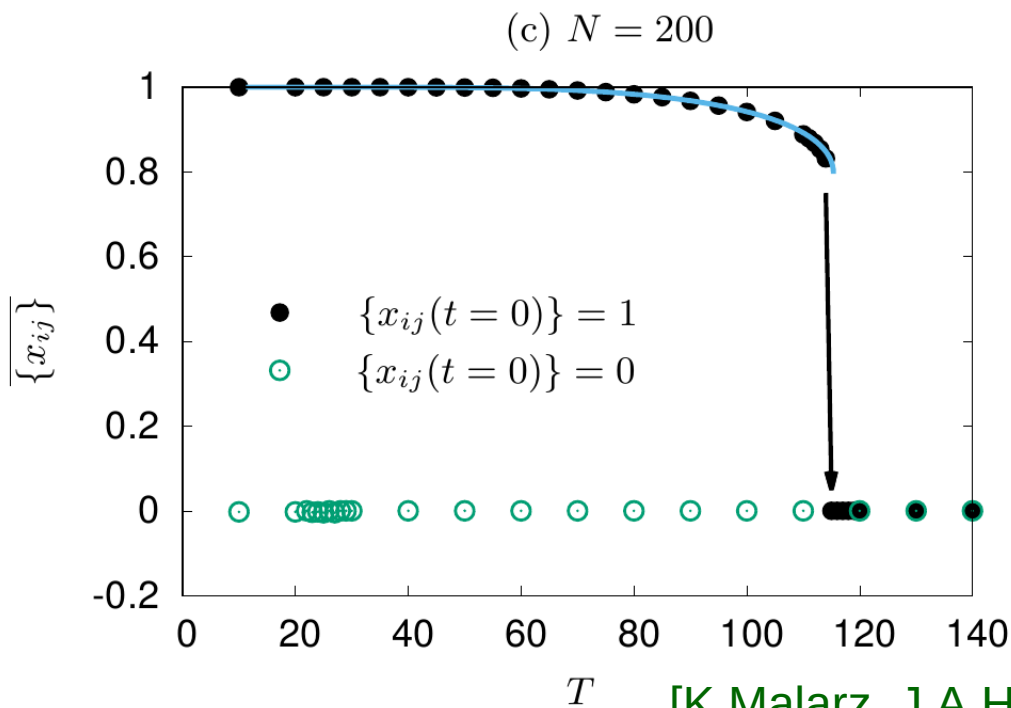
$$\xi_{ij}(t) = x_{im}(t)x_{jm}(t) + x_{in}(t)x_{jn}(t)$$



- 1 krok Mont Carlo = $3N$ synchronicznie wykonywanych prób modyfikacji każdej z $L=3N$ relacji x_{ij}

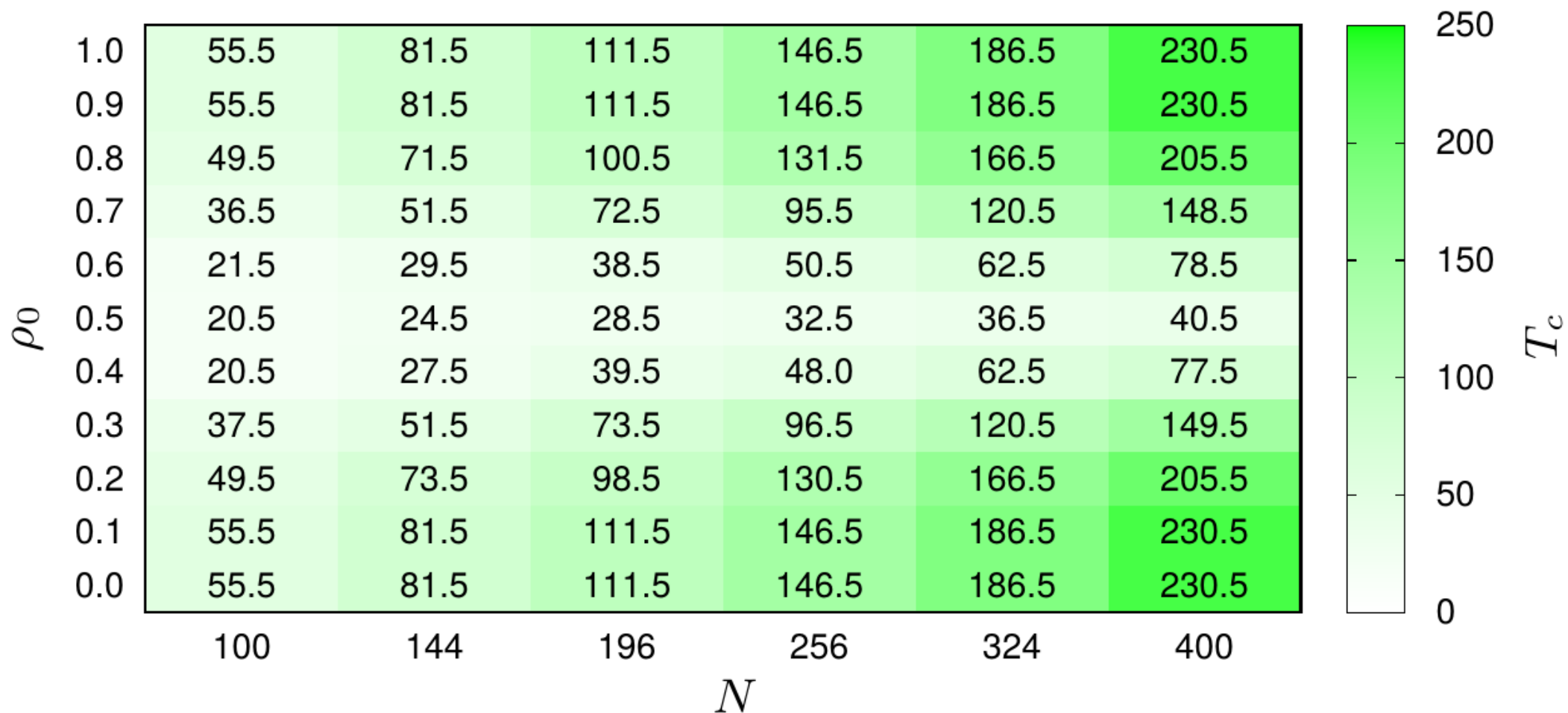
Ewolucja stochastyczna w przypadku grafu pełnego

- **przejście fazowe** pomiędzy stanami:
 - (przynajmniej częściowo) uporządkowanym i w równowadze Heidera
 - chaotycznym i nie wykazującym równowagi

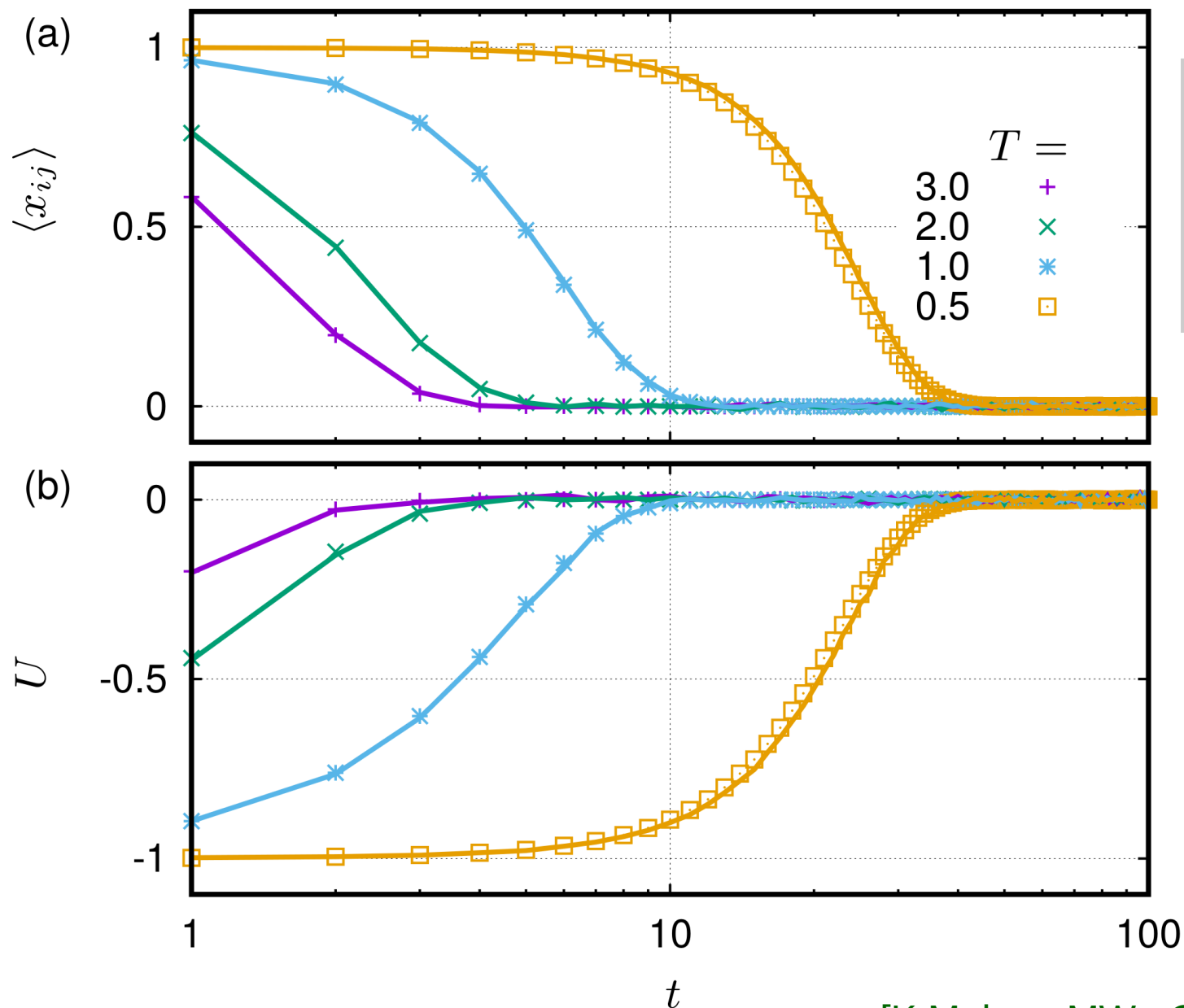


Temperatura krytyczna a rozmiary układu i stan początkowy

(a) $T_c(N; \rho_0)$



Ewolucja stochastyczna w sieci trójkątnej



$\rho_0 = 1$

$N = 400; 10000$

— ++

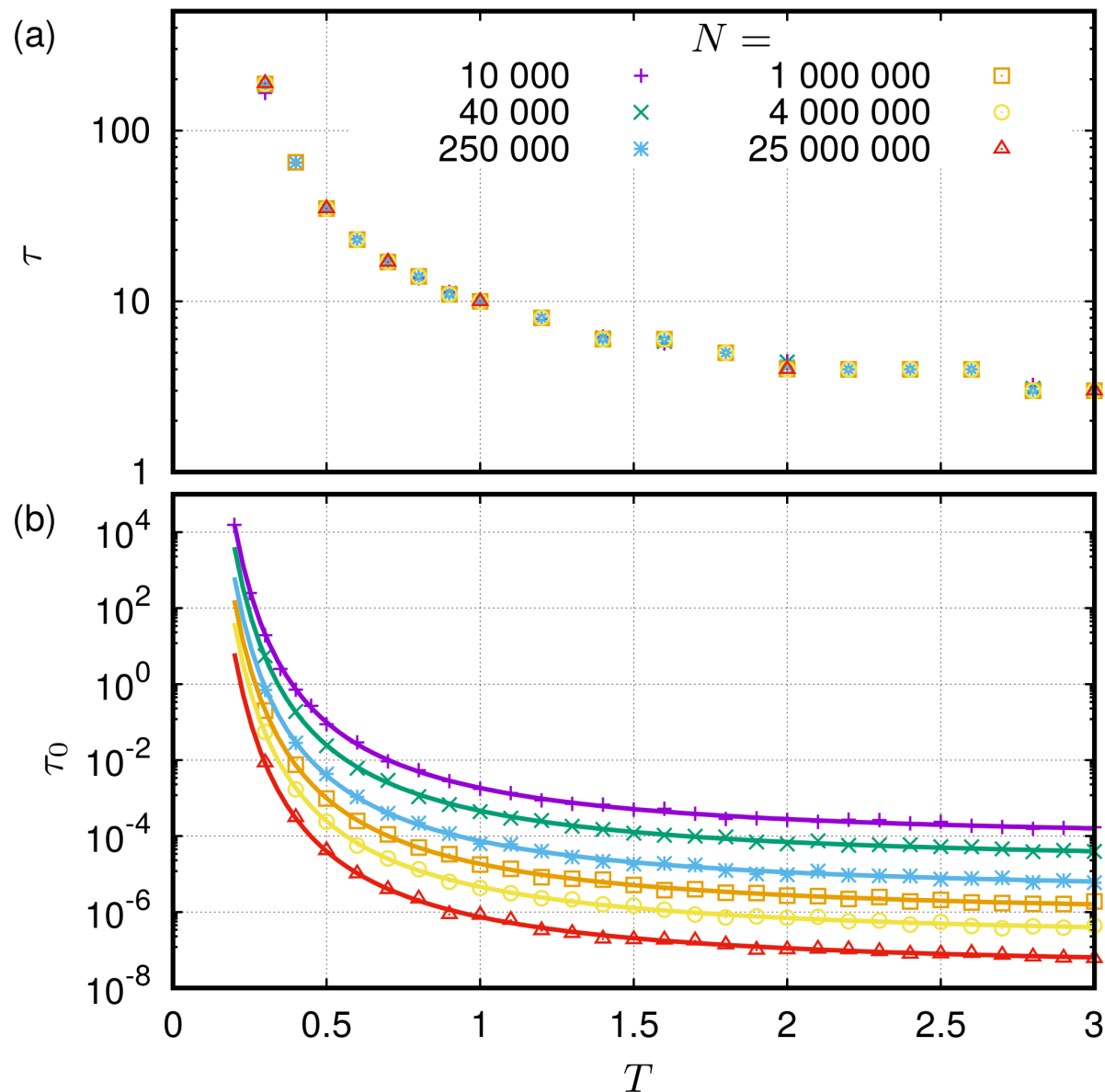
(wyniki
uśrednione
po 100
symulacjach)

Ewolucja stochastyczna w sieci trójkątnej

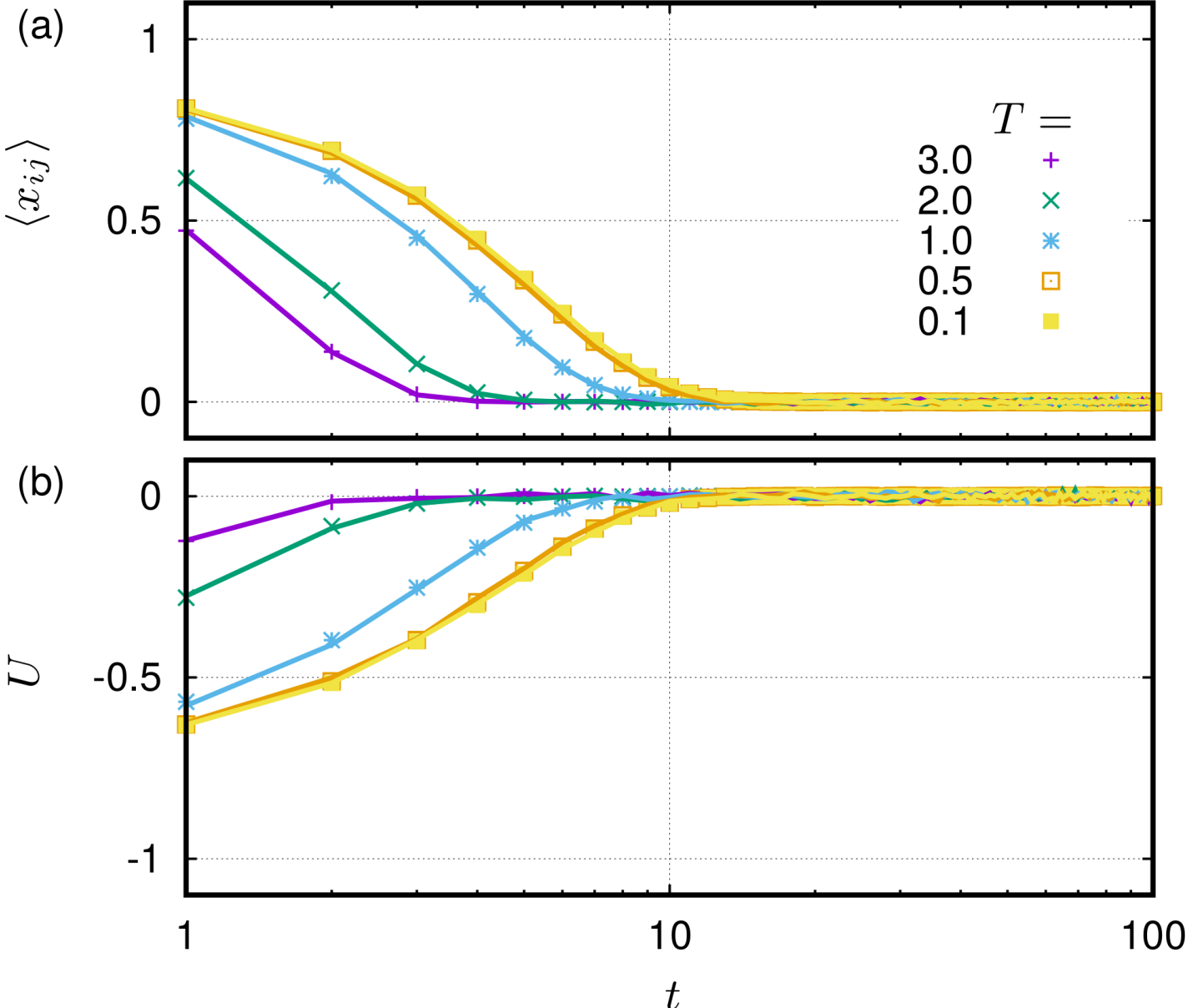
czas τ [MCS]
potrzebny
na osiągnięcie
stanu stacjonarnego

czas τ_0 [MCS]
potrzebny
na odwrócenie
pierwszego x_{ij}

$$\tau_0 = \frac{1 + \exp(4/T)}{3N}$$



Ewolucja stochastyczna w sieci trójkątnej

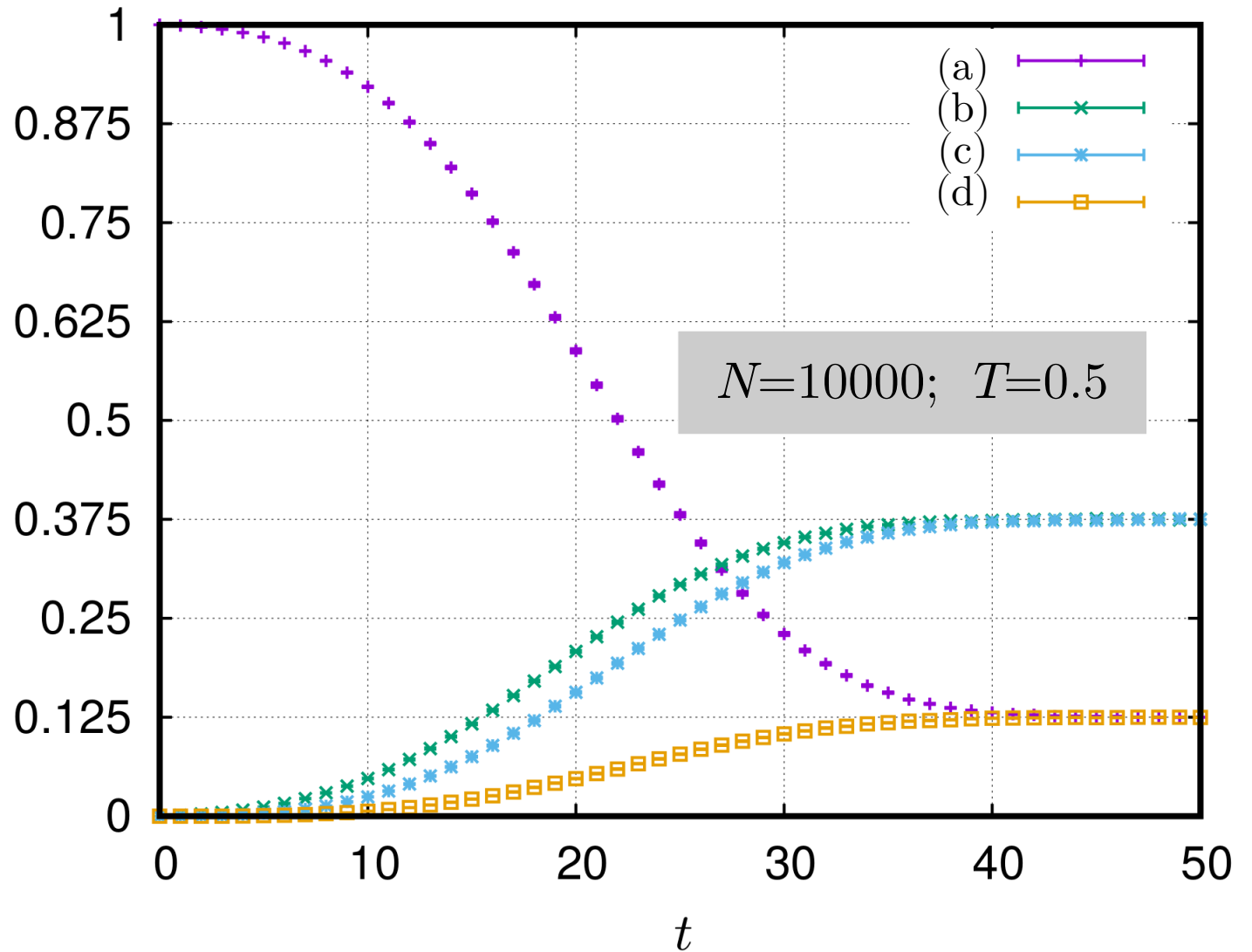
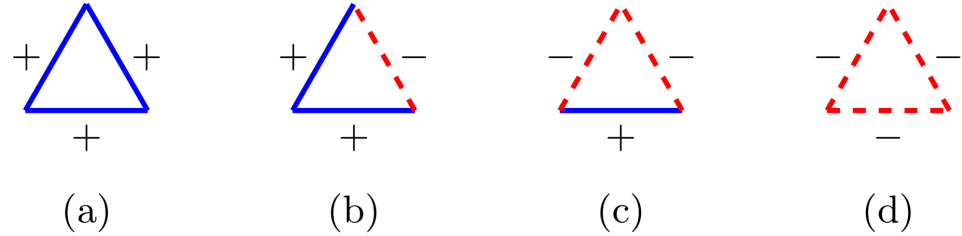


$\rho_0 = 0.95$

$N = 400; 10000$

— ++

Ewolucja stochastyczna w sieci trójkątnej



rozkład rodzajów triad

$(1, 0, 0, 0)$



$(1/8, 3/8, 3/8, 1/8)$



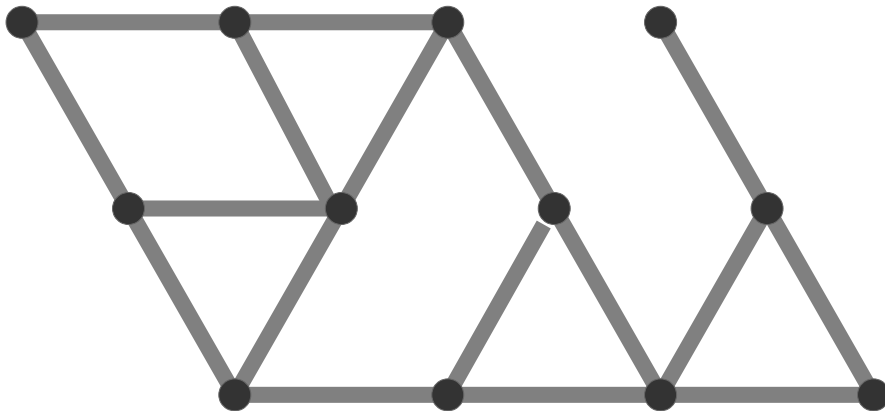
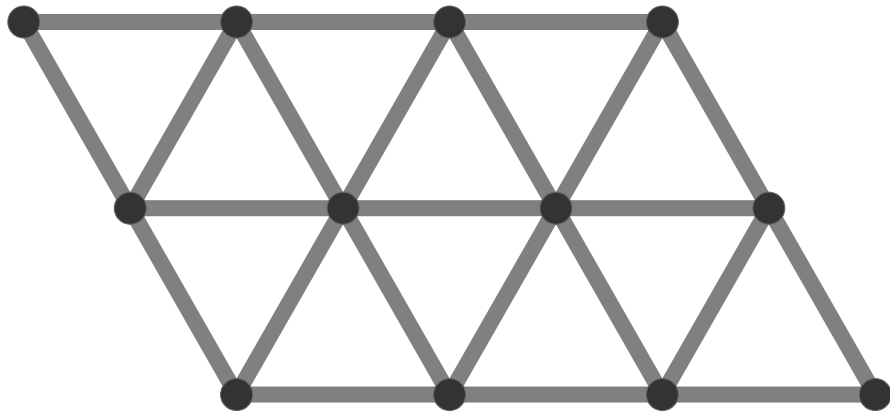
prawdopodobieństwo

$$\binom{3}{k} p^k (1-p)^{3-k}$$

$k=3,2,1,0$ sukcesów
w próbach Bernoulliego
z $p=1/2$.

Rozrzedzona sieć trójkątna

(DTL, Diluted Triangular Lattice)

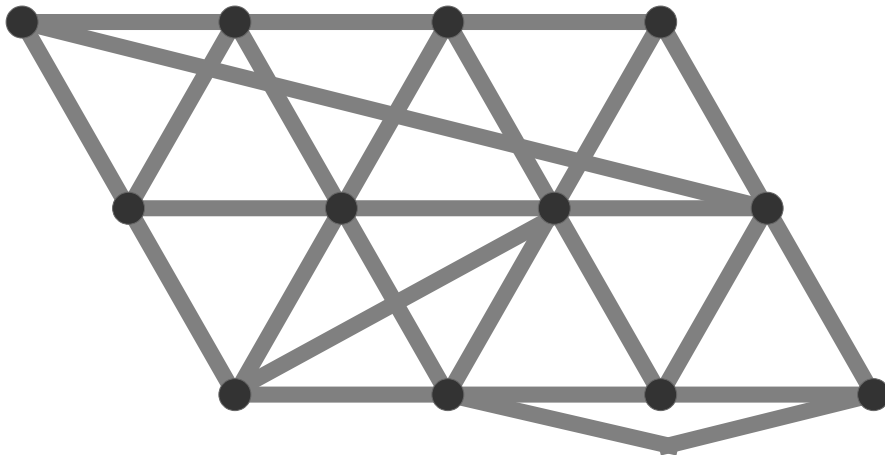
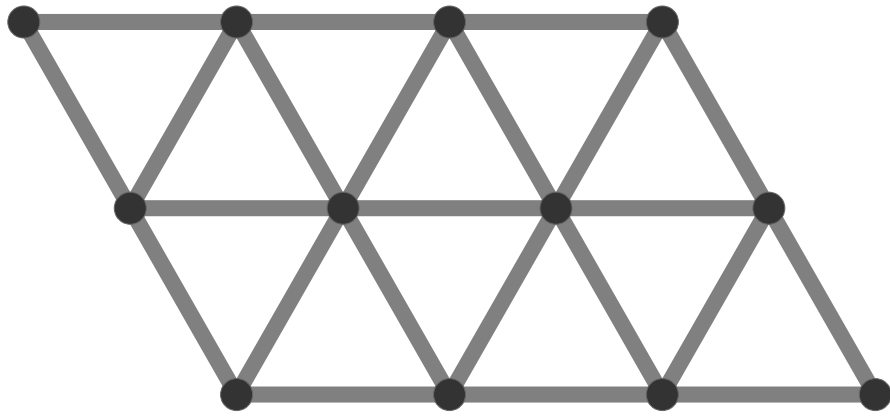


$p_- = 1 - \frac{q_-}{L_{TR}}$ – prawdopodobieństwo że połączenie „przetrwało”

- powstaje poprzez usunięcie q_- losowo wybranych krawędzi sieci trójkątnej z $N=W \times W$ węzłami
- losowo wybrane, niezerowe elementy **macierzy połączeń A**
 $a_{ij}=1$
zmieniane na
 $a_{ij}=0$

Rozrzedzona sieć trójkątna

(**ETL**, *Enhanced Triangular Lattice*)



- powstaje poprzez dodanie do sieci trójkątnej ($N=W^2$) q_+ nowych losowo rozmieszczonych połączeń

- losowo wybrane, zerowe elementy **macierzy połączeń A**

$$a_{ij}=0$$

zmieniane na

$$a_{ij}=1$$

$$p_+ = 1 + \frac{q_+}{L_{TR}}$$

- dla dowolnej sieci z symetrycznymi:
macierzą połączeń $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $a_{ij} \in \{0, 1\}$
oraz macierzą relacji $\mathbf{X} = [x_{ij}]$, $x_{ij} \in \{-1, +1\}$

liczba triad $\Delta = \sum_i \sum_{j>i} \sum_{k>j} a_{ij} a_{jk} a_{ki} = \frac{1}{6} \text{Tr} \mathbf{A}^3$

liczba połączeń $L = \sum_i \sum_{j>i} a_{ij} = \frac{1}{2} \text{Tr} \mathbf{A}^2$

gęstość $D = \frac{L}{L_{\text{CG}}} = \frac{\text{Tr} \mathbf{A}^2}{2 \binom{N}{2}}$

"energia" $U = - \frac{\text{Tr}(\mathbf{A} \circ \mathbf{X})^3}{\text{Tr} \mathbf{A}^3}$

Ewolucja stochastyczna

(uogólniona na dowolną sieć DTL/ETL)

- dążenie do równowagi Heidera oraz równowagi termicznej

$$x_{ij}(t+1) = \begin{cases} +1 & \text{z prawdop. } p_{ij}(t), \\ -1 & \text{z prawdop. } [1 - p_{ij}(t)], \end{cases}$$

$$p_{ij}(t) = \frac{\exp[\xi_{ij}(t)/T]}{\exp[\xi_{ij}(t)/T] + \exp[-\xi_{ij}(t)/T]}$$

$$\xi_{ij}(t) = \sum_k a_{ik}(t)x_{ik}(t) a_{kj}(t)x_{kj}(t)$$

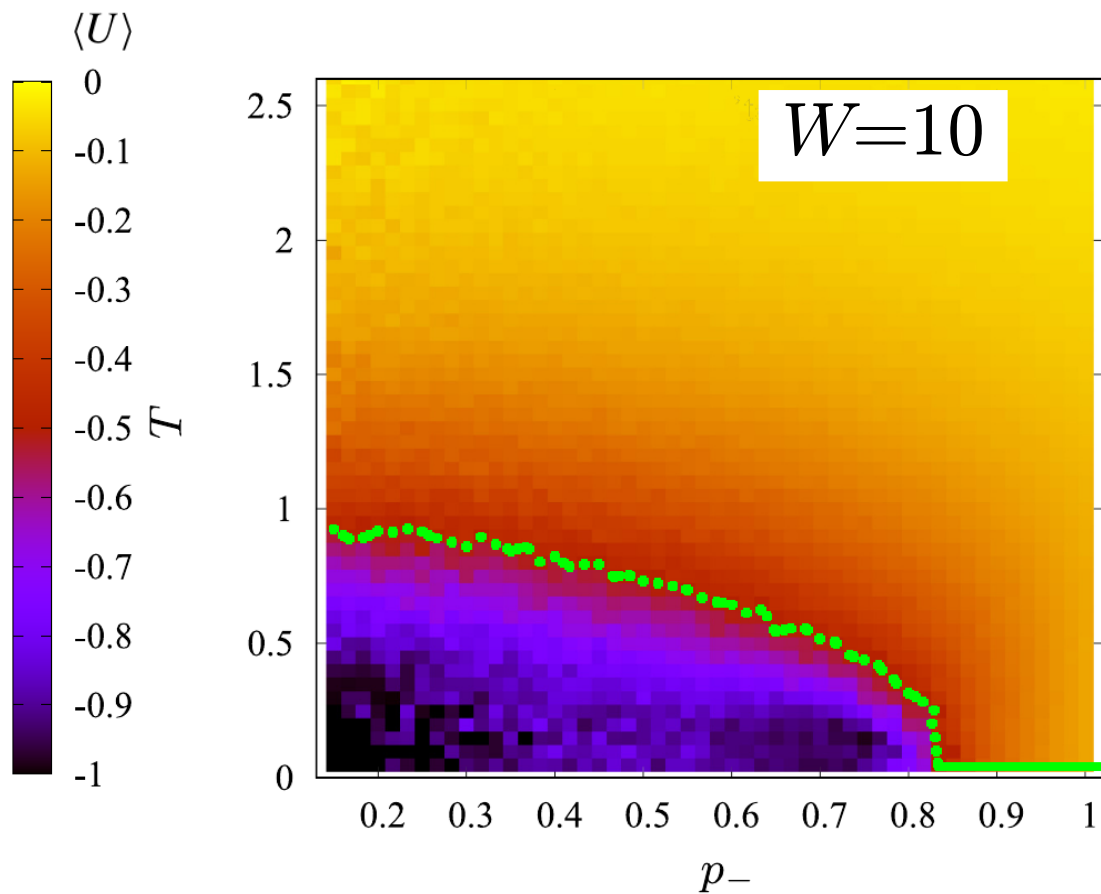
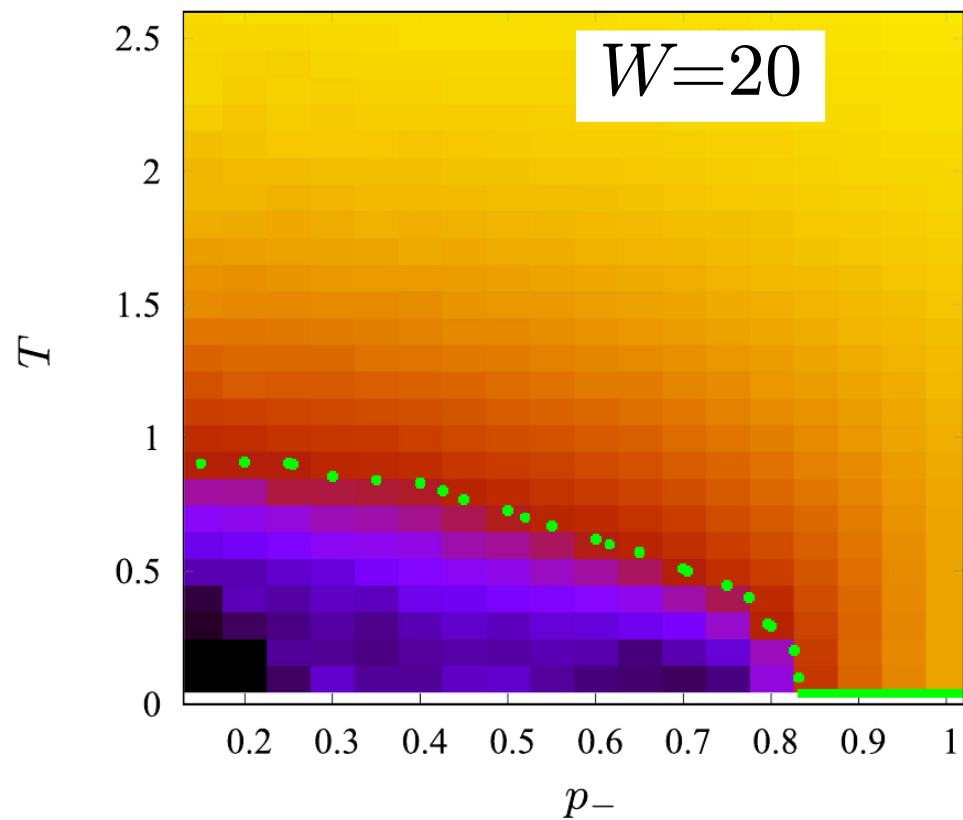
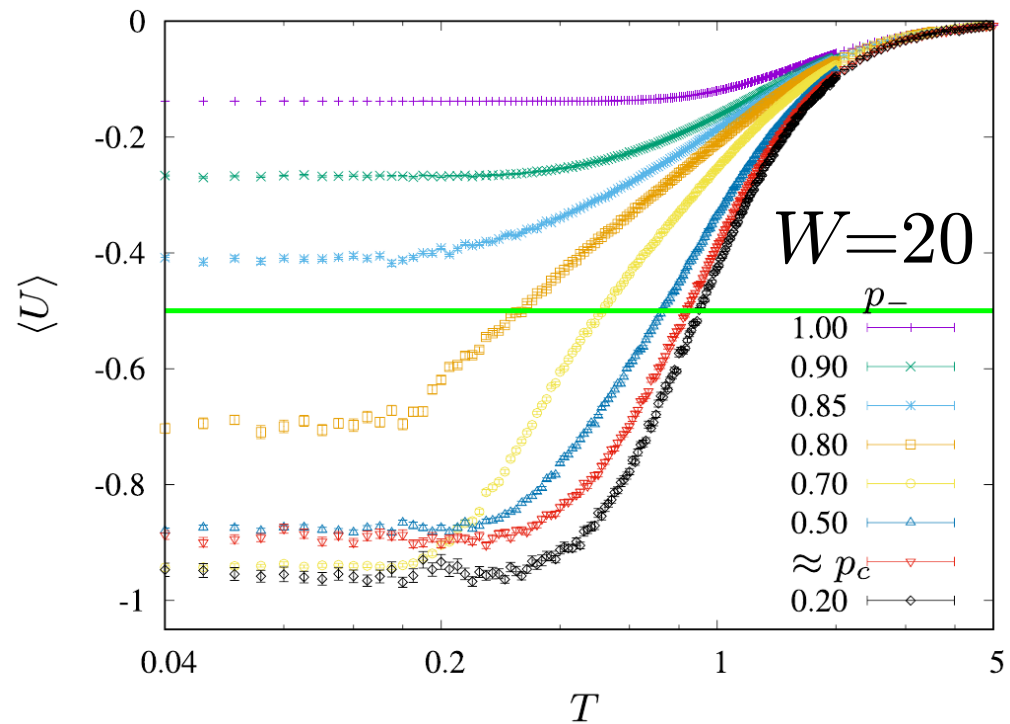
DTL

$p_- = 1$ – sieć trójkątna, $N = W \times W$

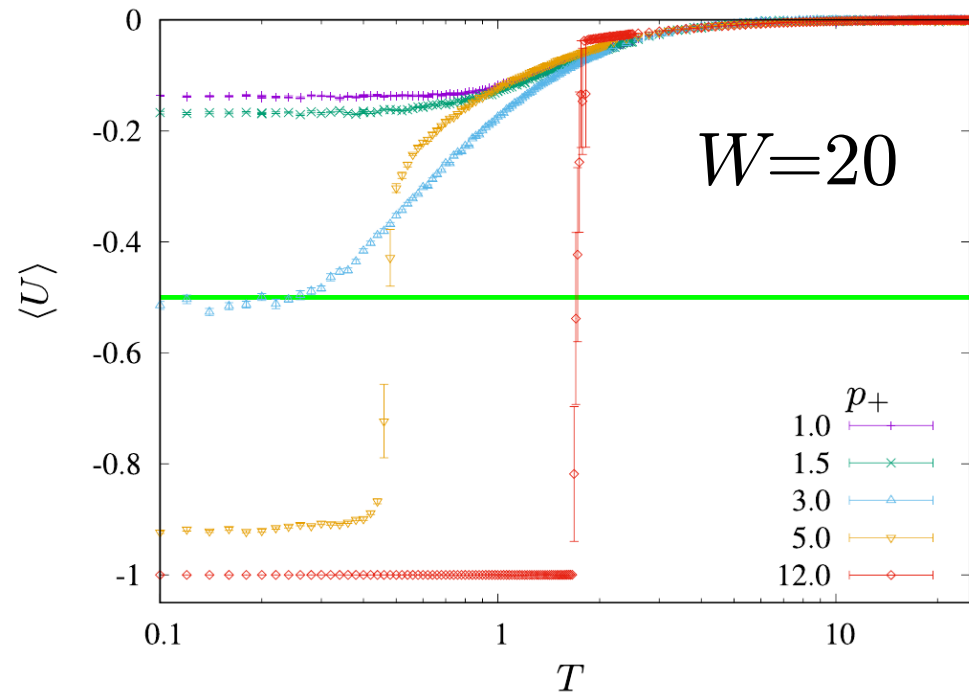
$p_c = 2 \sin(\pi/18) \approx 0.347$

– próg perkolacji
dla sieci trójkątnej

[MW, K.Malarz, *Phys. Rev. E*
105 (2022) 024301]



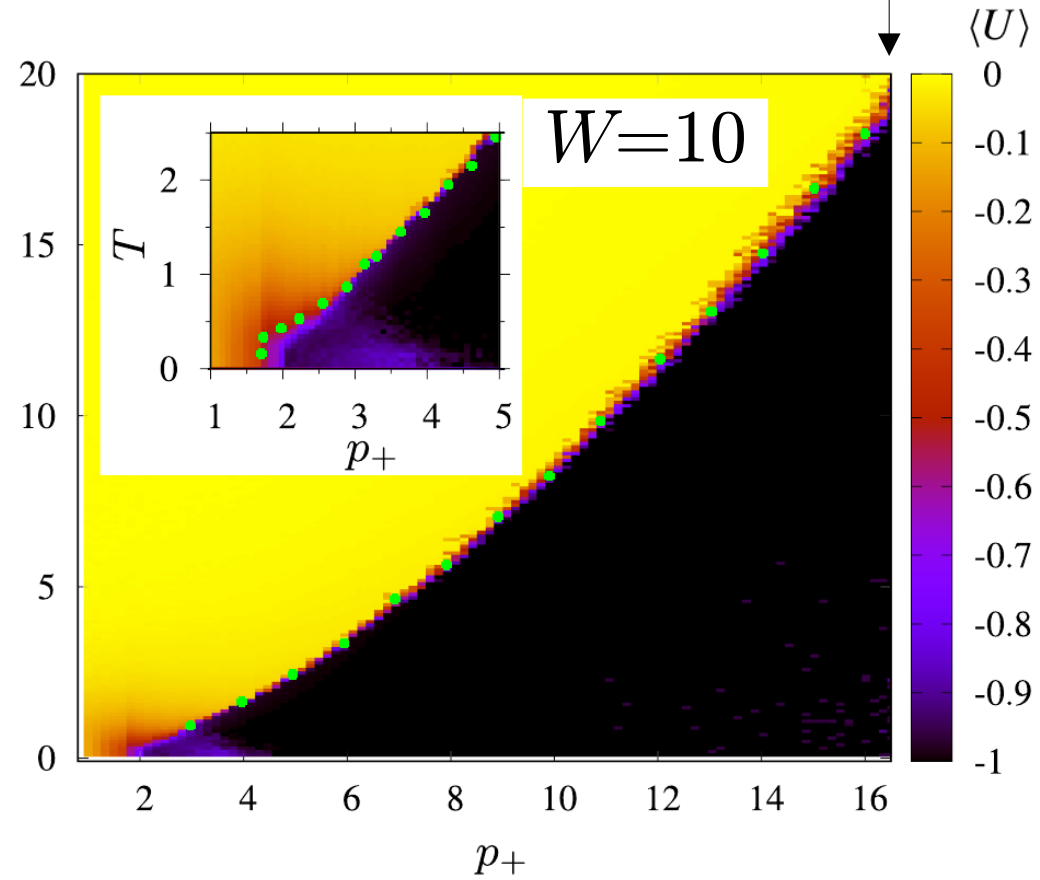
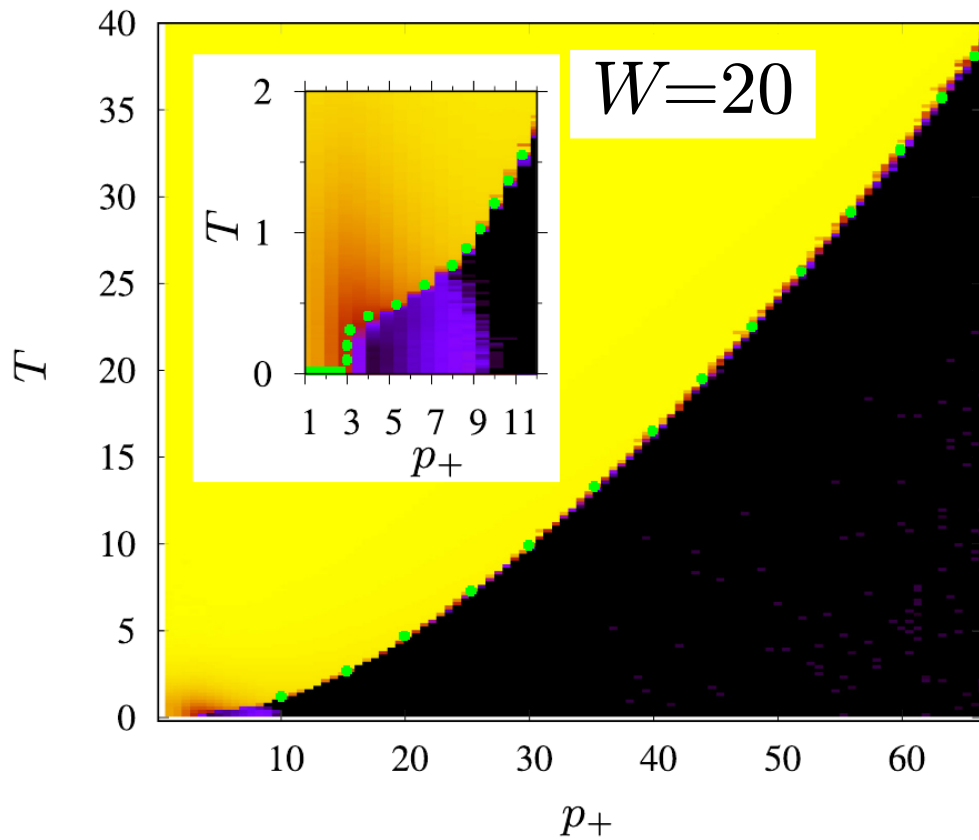
ETL



$p_+ = 1$ – sieć trójkątna, $N=W \times W$

$$p_{CG} = \frac{N-1}{6} = \frac{W^2-1}{6}$$

graf pełny
(CG)



DTL & ETL

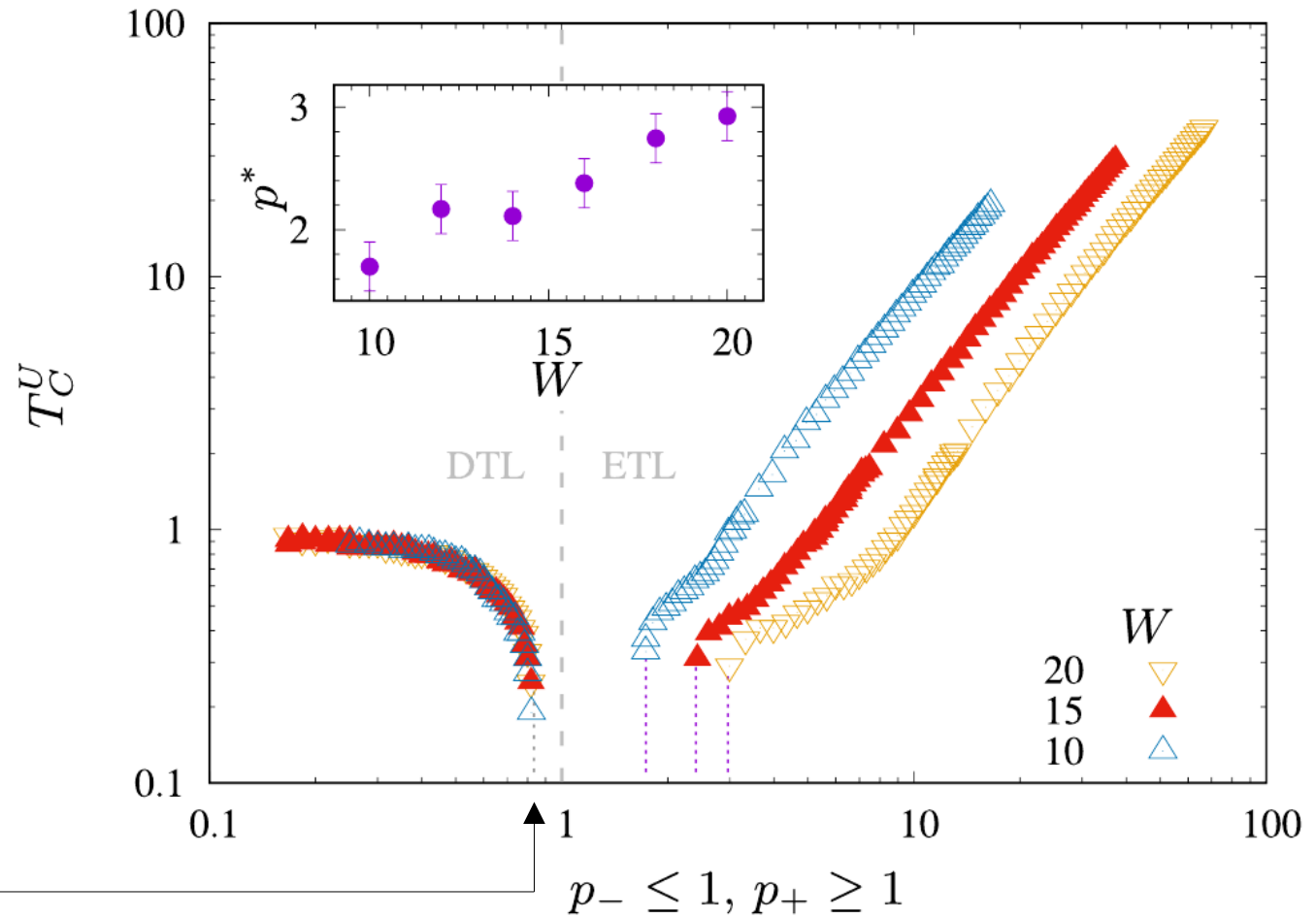
TABLE I. Exponent γ and its uncertainty $u(\gamma)$ in $T_C^U \propto p_+^\gamma$ found for ETL's sizes $W = 10, 15,$ and 20 .

W	10	15	20
γ	1.64	1.644	1.686
$u(\gamma)$	0.02	0.007	0.006

średni stopień wierzchołka:

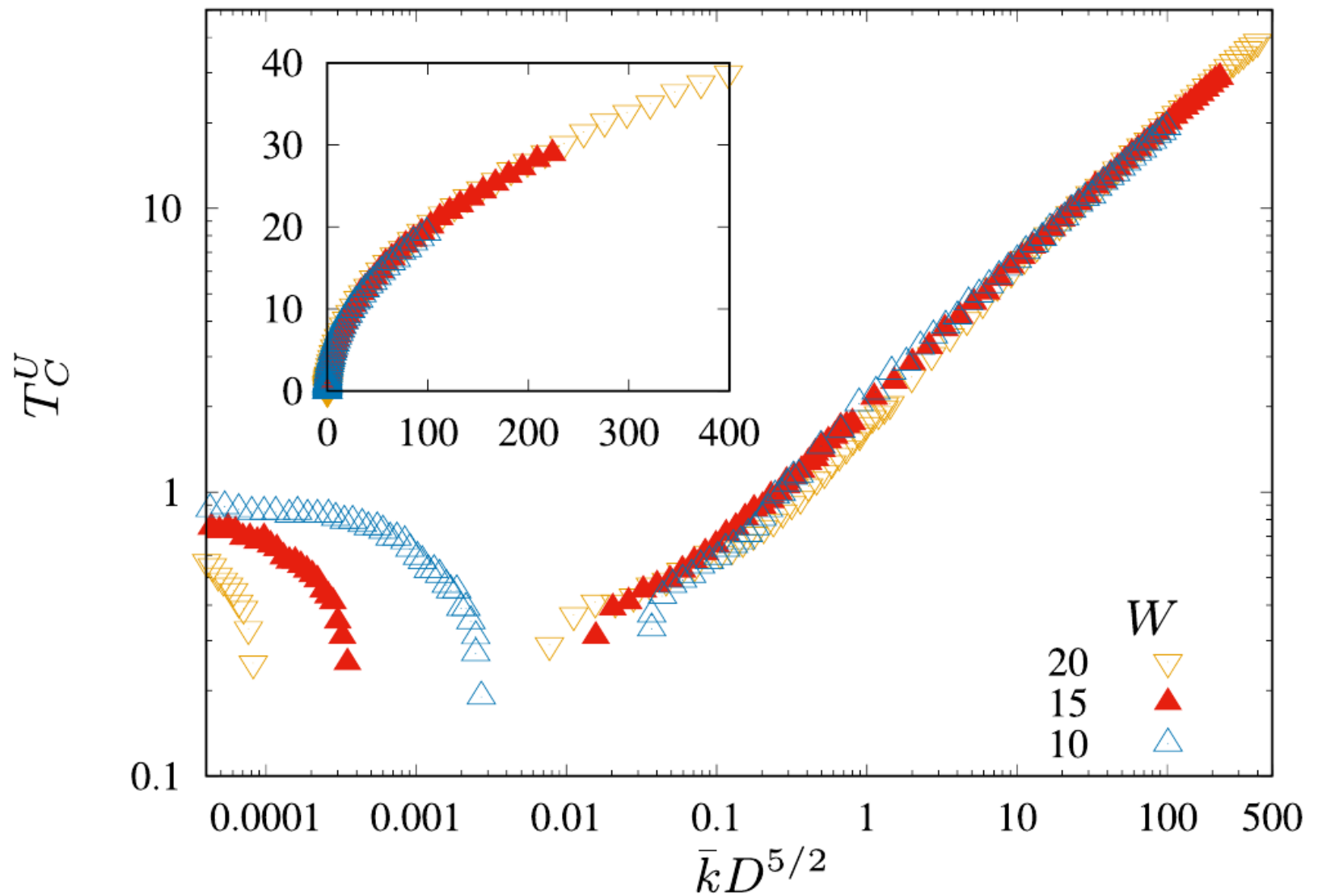
$$\bar{k} = \frac{2L}{N} = 6p_{\pm}$$

$$p_- = 5/6 \Rightarrow \bar{k} = 5$$



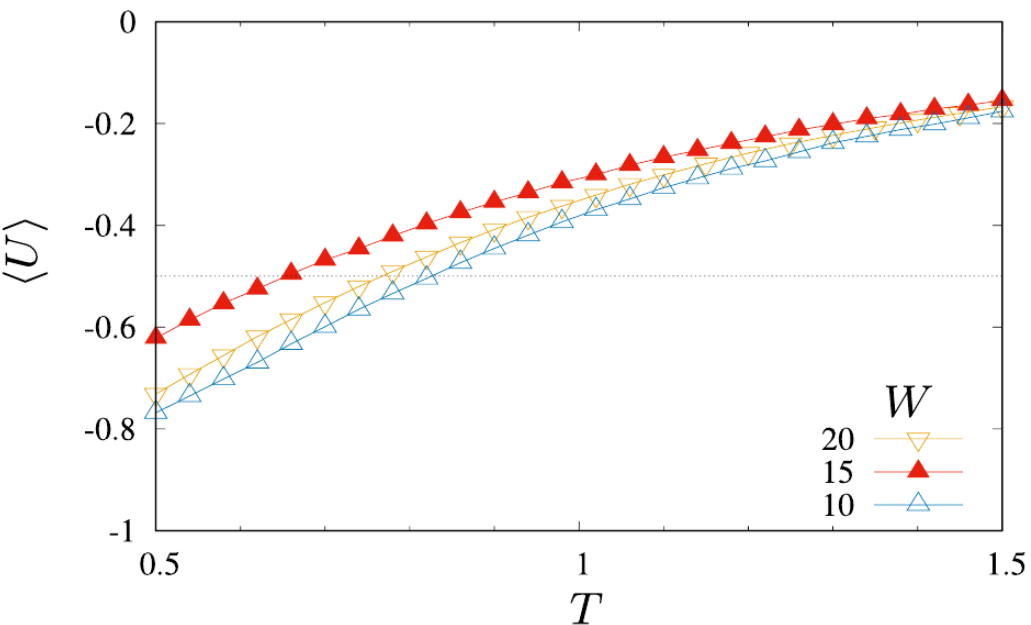
$$p_- \leq 1, p_+ \geq 1$$

DTL & ETL

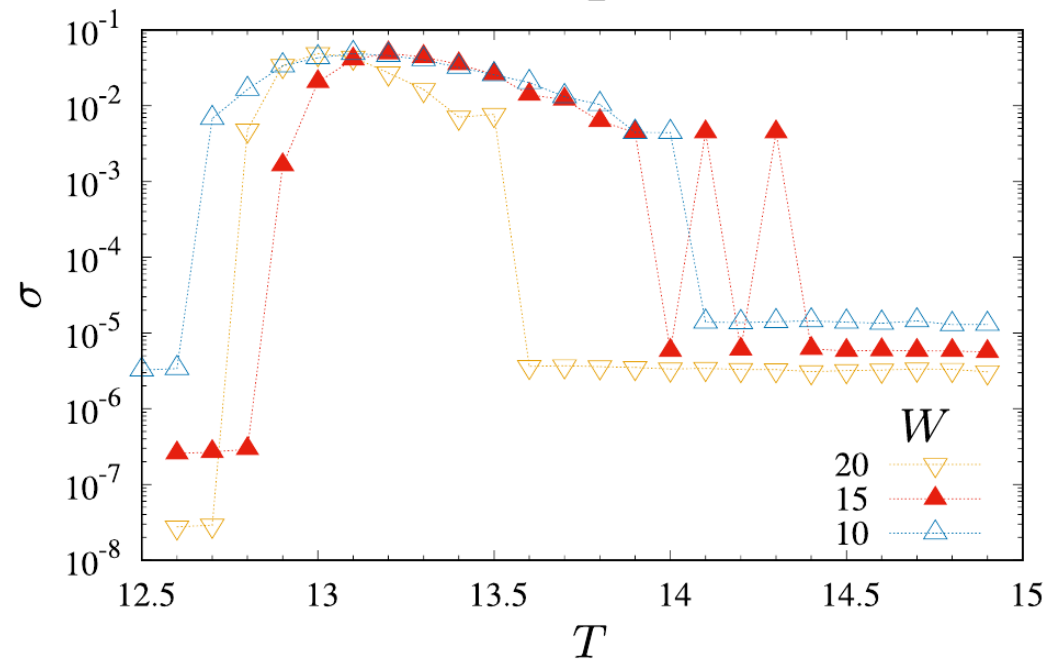
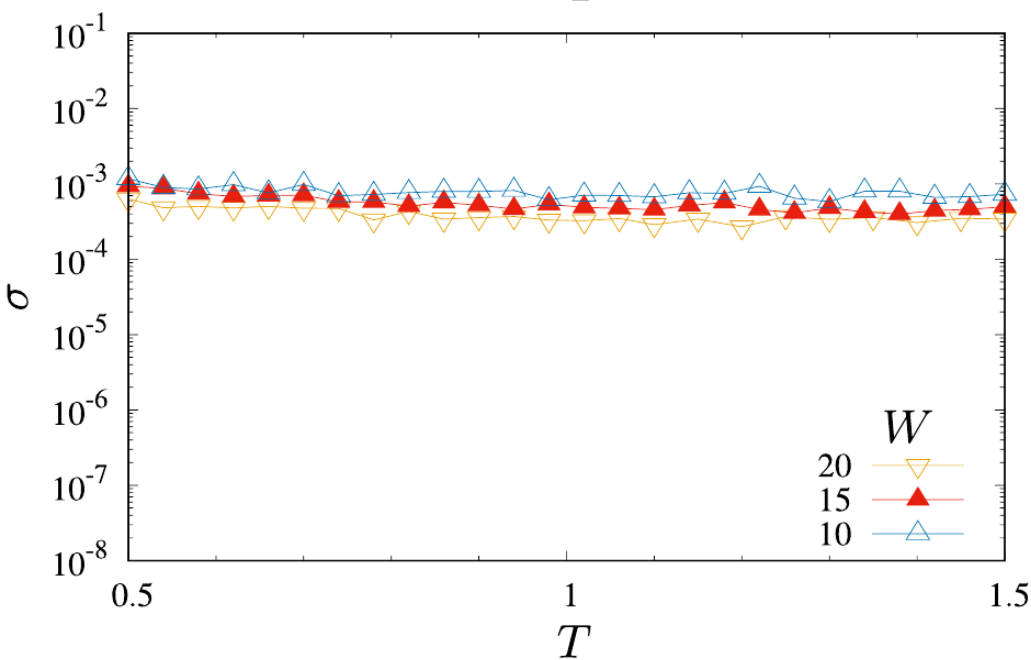
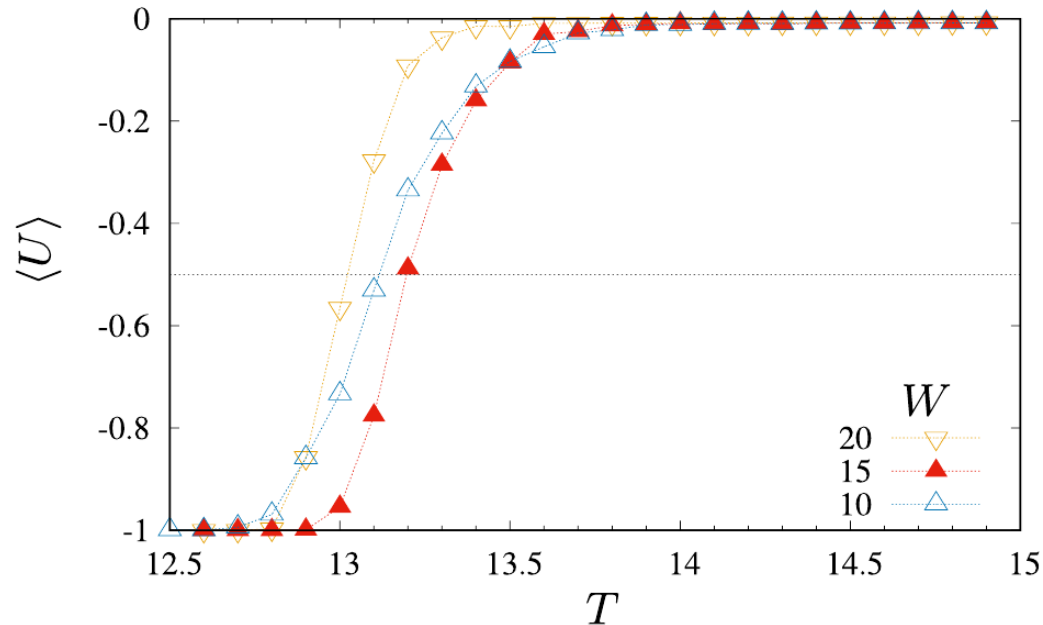


Przejsie fazowe?

DTL $p_- = 0.5 \Rightarrow \bar{k} = 3$

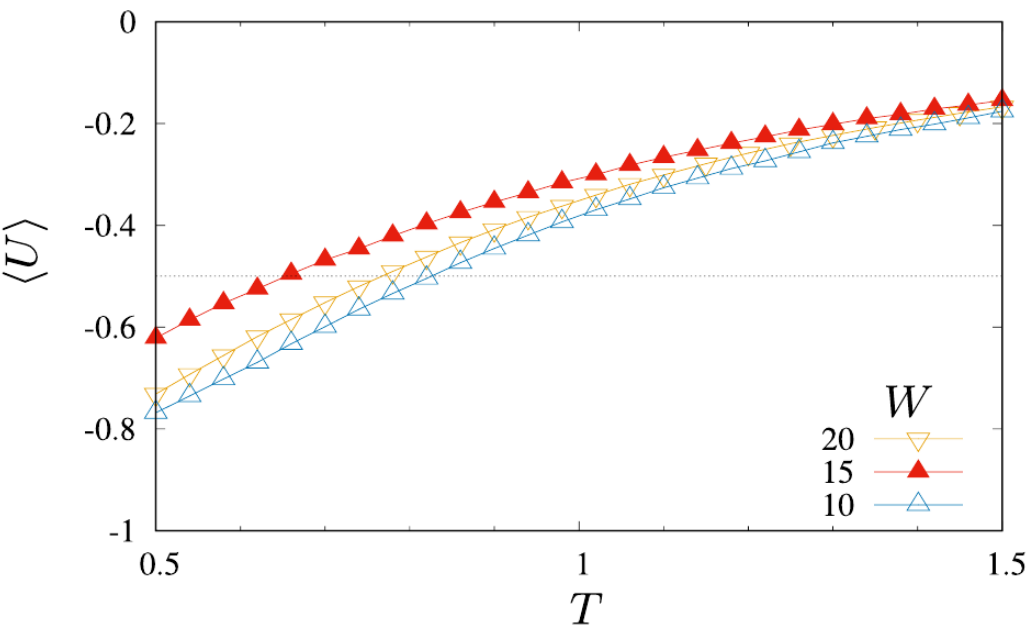


ETL $\bar{k}D^{5/2} = 40$

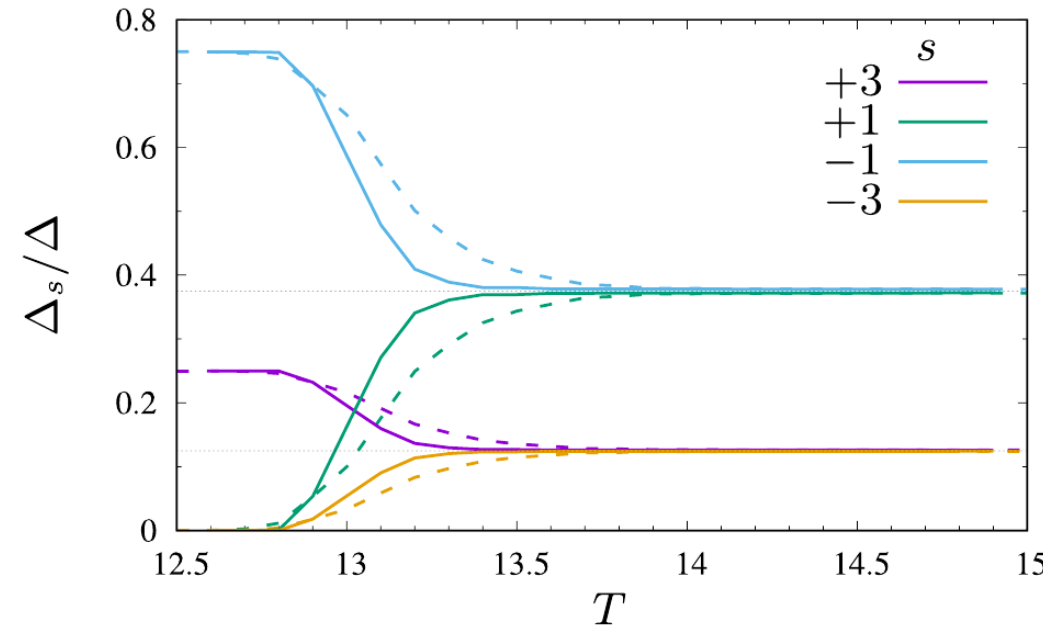
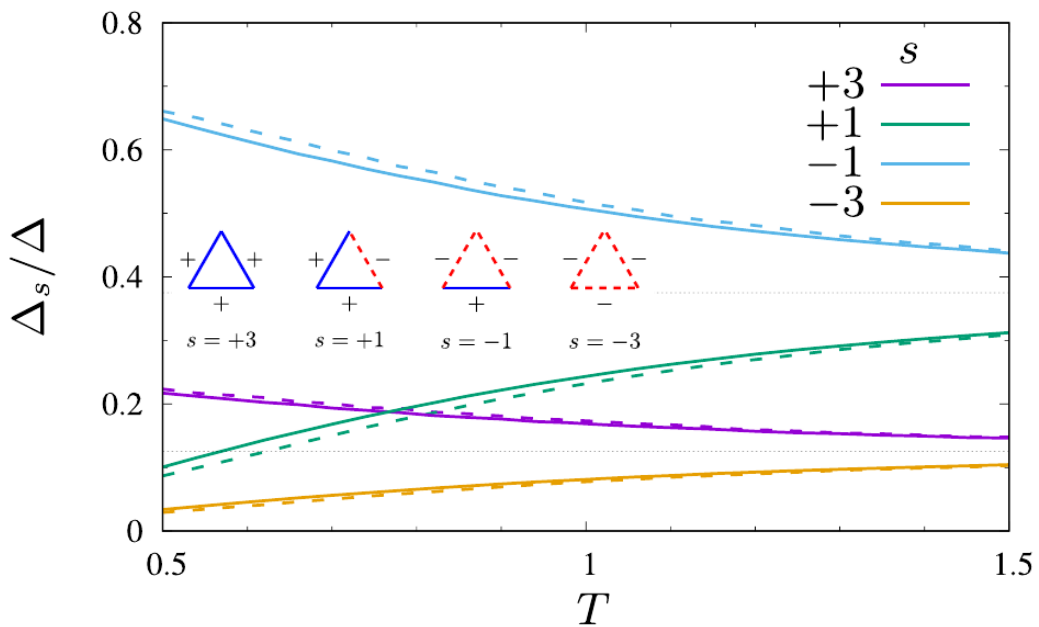
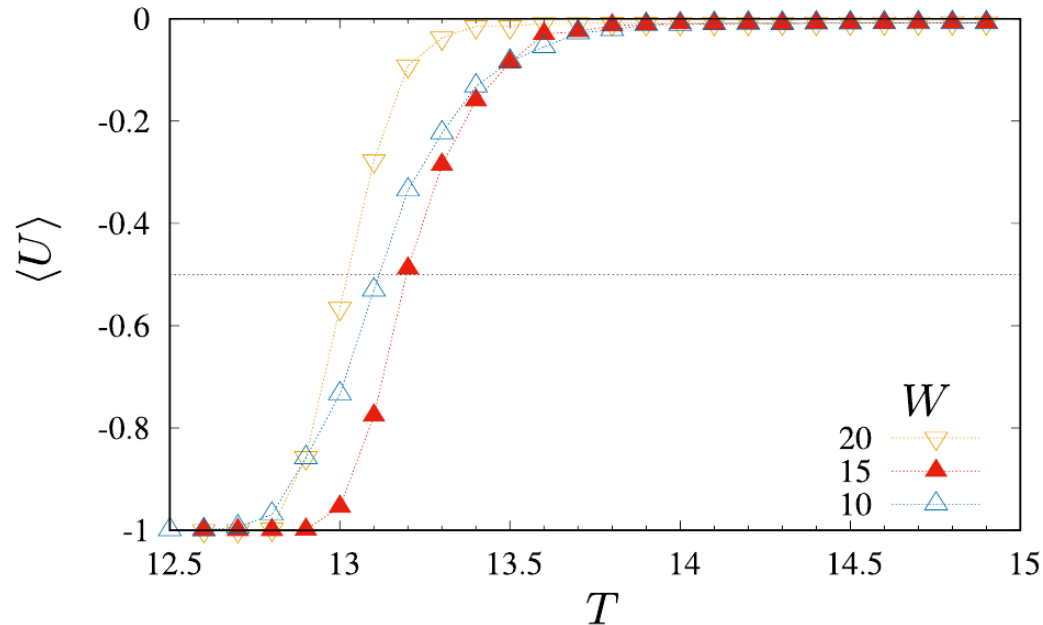


Przejsie fazowe?

DTL $p_- = 0.5 \Rightarrow \bar{k} = 3$



ETL $\bar{k}D^{5/2} = 40$



Przejsie fazowe?

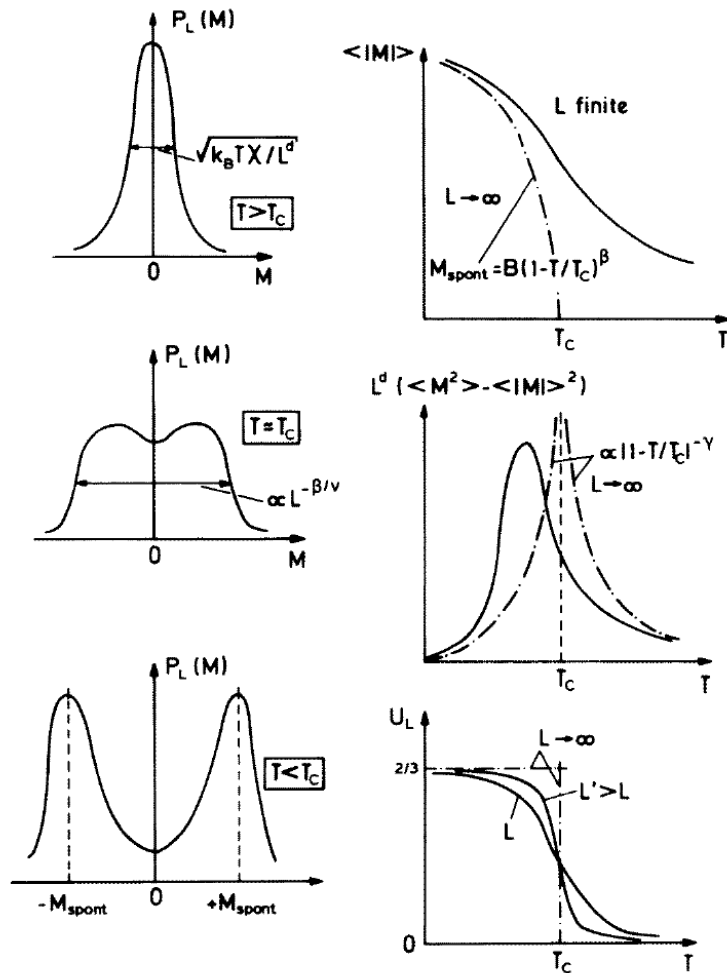


Figure 6. Schematic evolution of the order parameter distribution $P_L(s)$ from $T > T_c$ to $T < T_c$ (from above to below, left-hand side) for an Ising ferromagnet, where s is the magnetization per site, in a box of volume $V = L^d (= L^3$ in $d = 3$ dimensions). The right-hand side shows the corresponding temperature dependence of the mean order parameter $\langle |s| \rangle$, the susceptibility $k_B T \chi' = L^d (\langle s^2 \rangle - \langle |s| \rangle^2)$, and the reduced fourth-order cumulant $U_L = 1 - \langle s^4 \rangle / [3 \langle s^2 \rangle^2]$. Dashed curves indicate the singular variation that results in the thermodynamic limit, $L \rightarrow \infty$.

„Kumulanta Bindera”

$$K = 1 - \frac{\langle U^4 \rangle}{3 \langle U^2 \rangle^2}$$

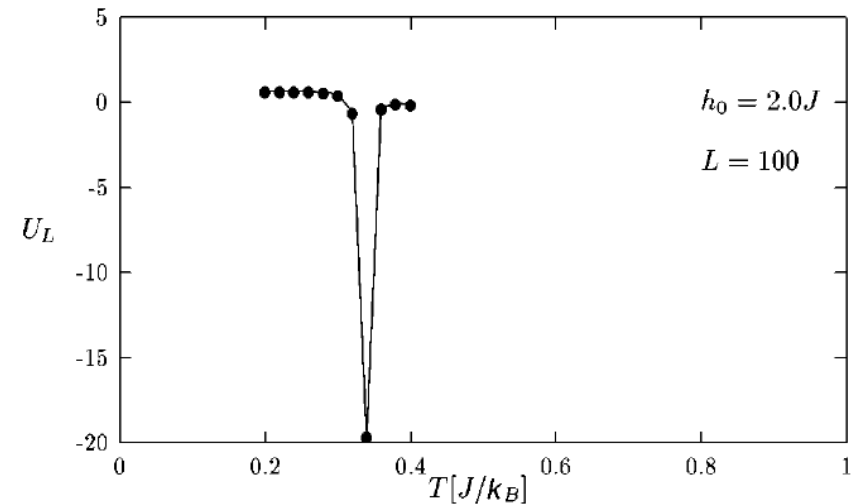
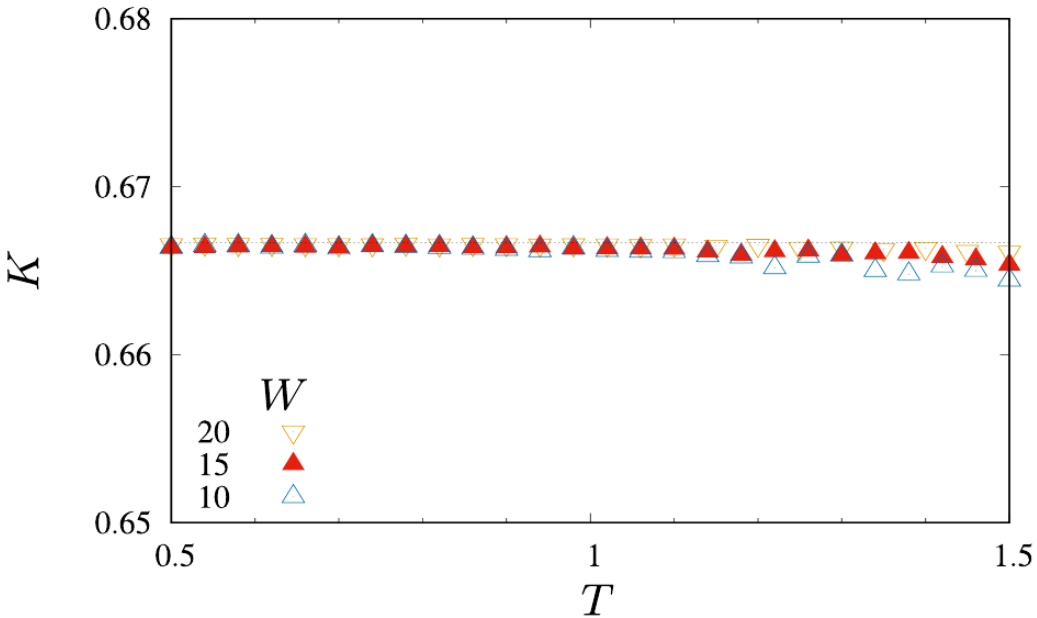


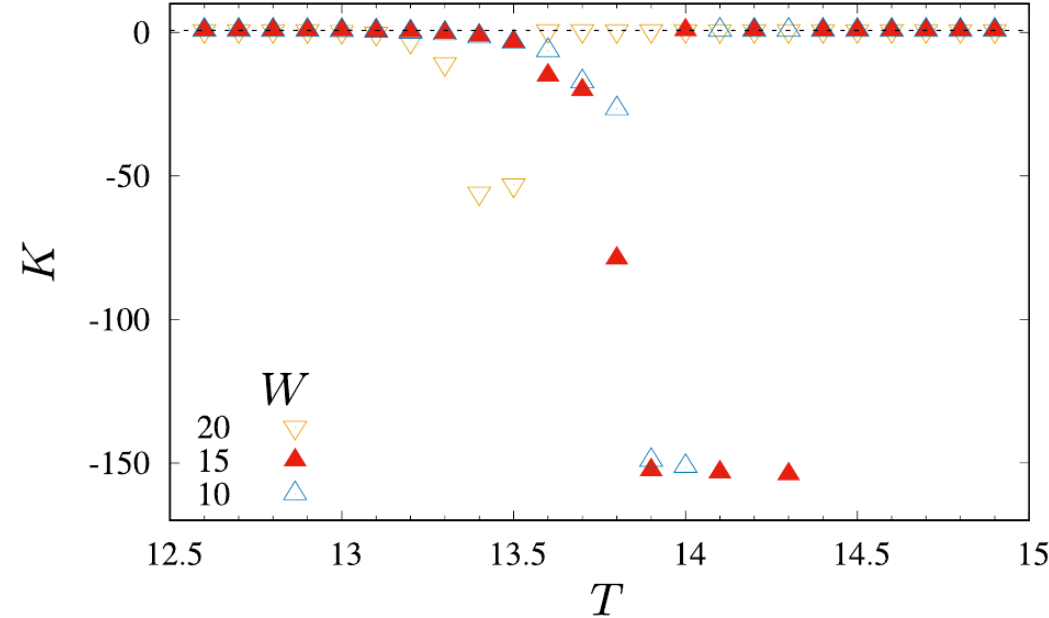
FIG. 4. Temperature (T) variation of the fourth-order Binder cumulant. A deep minimum indicates that the transition is first order and the position of minimum is the transition point.

Przejsie fazowe?

DTL $p_- = 0.5 \Rightarrow \bar{k} = 3$



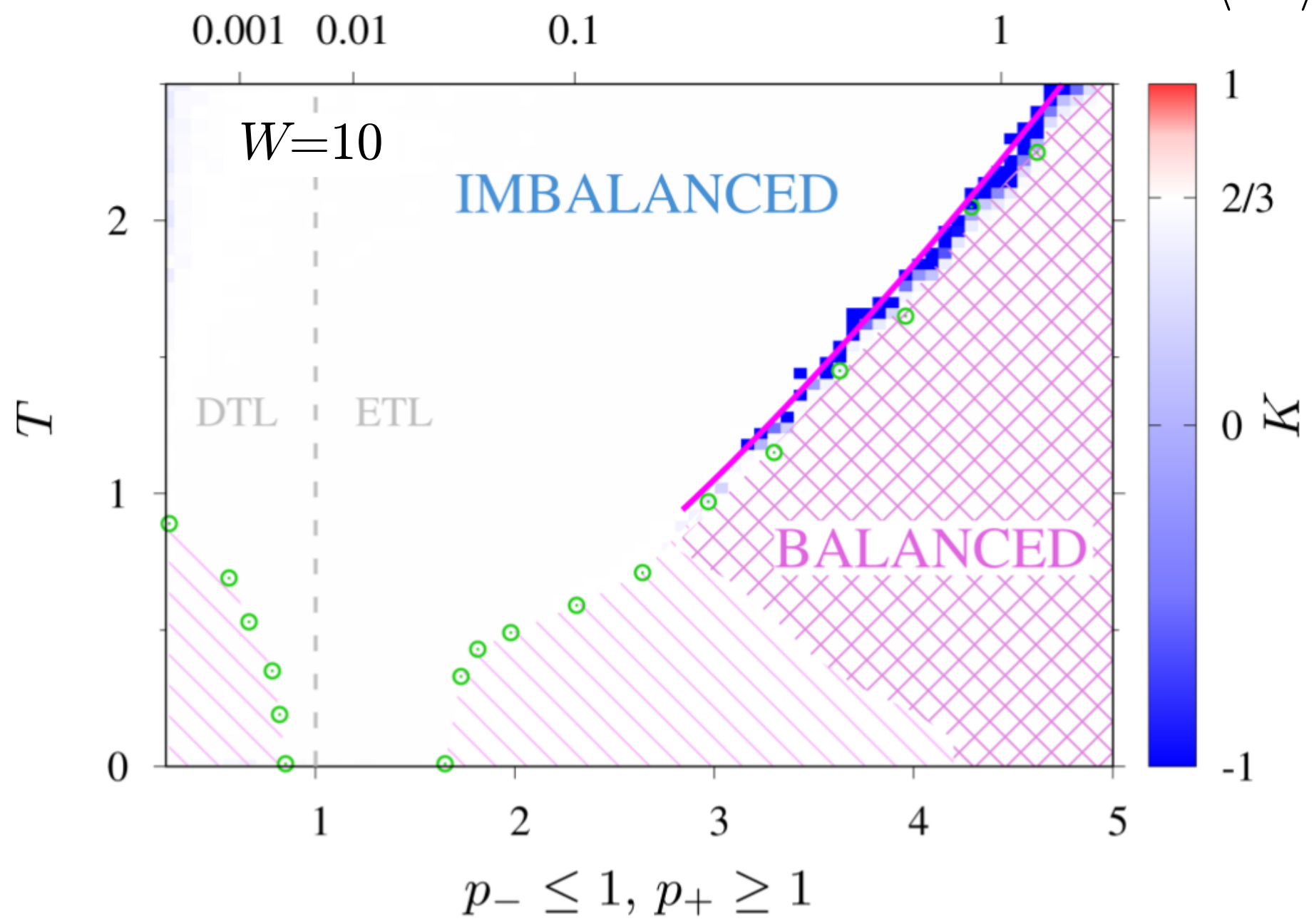
ETL $\bar{k}D^{5/2} = 40$

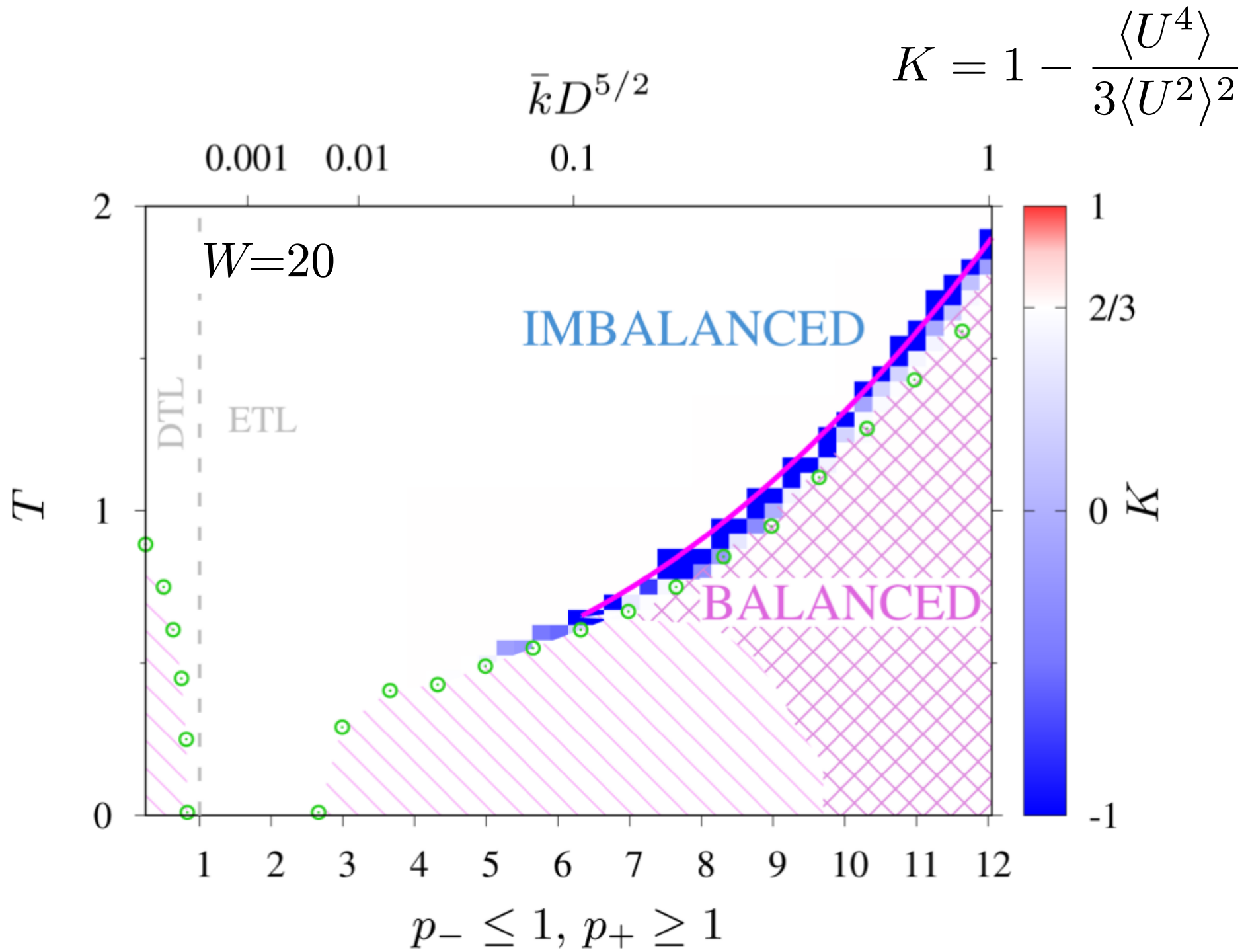


$$K = 1 - \frac{\langle U^4 \rangle}{3\langle U^2 \rangle^2}$$

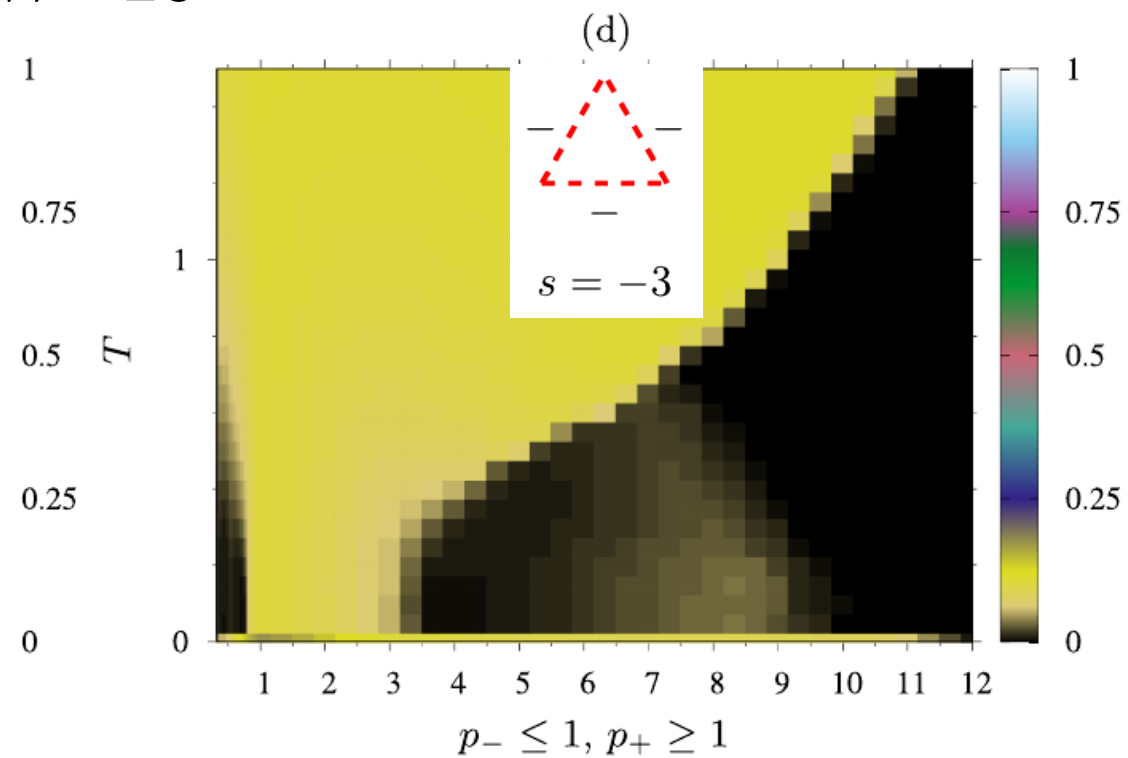
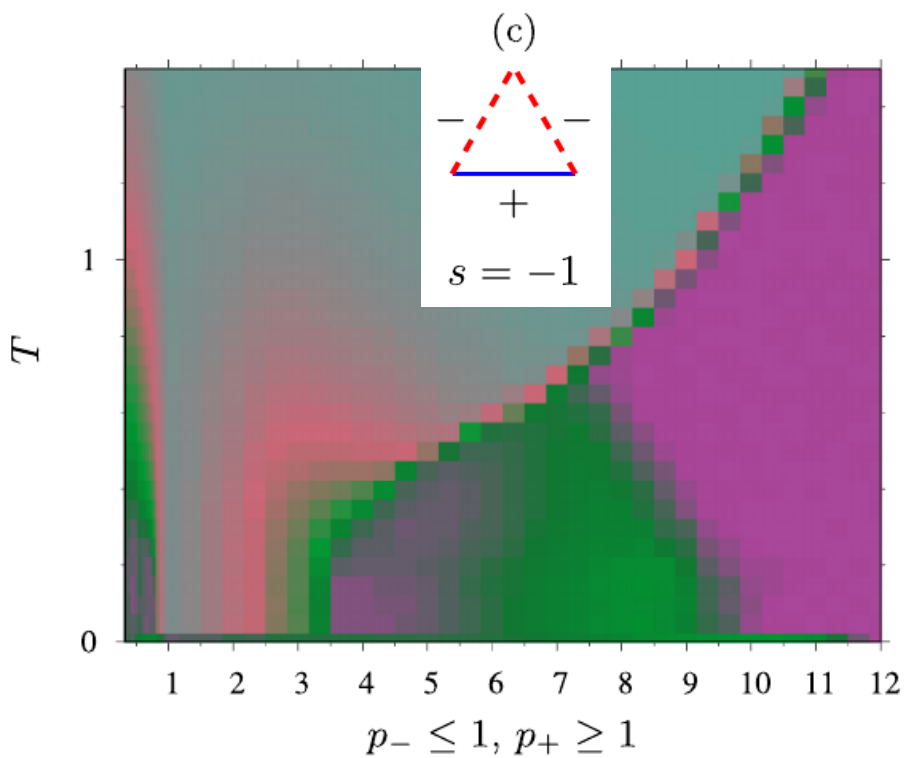
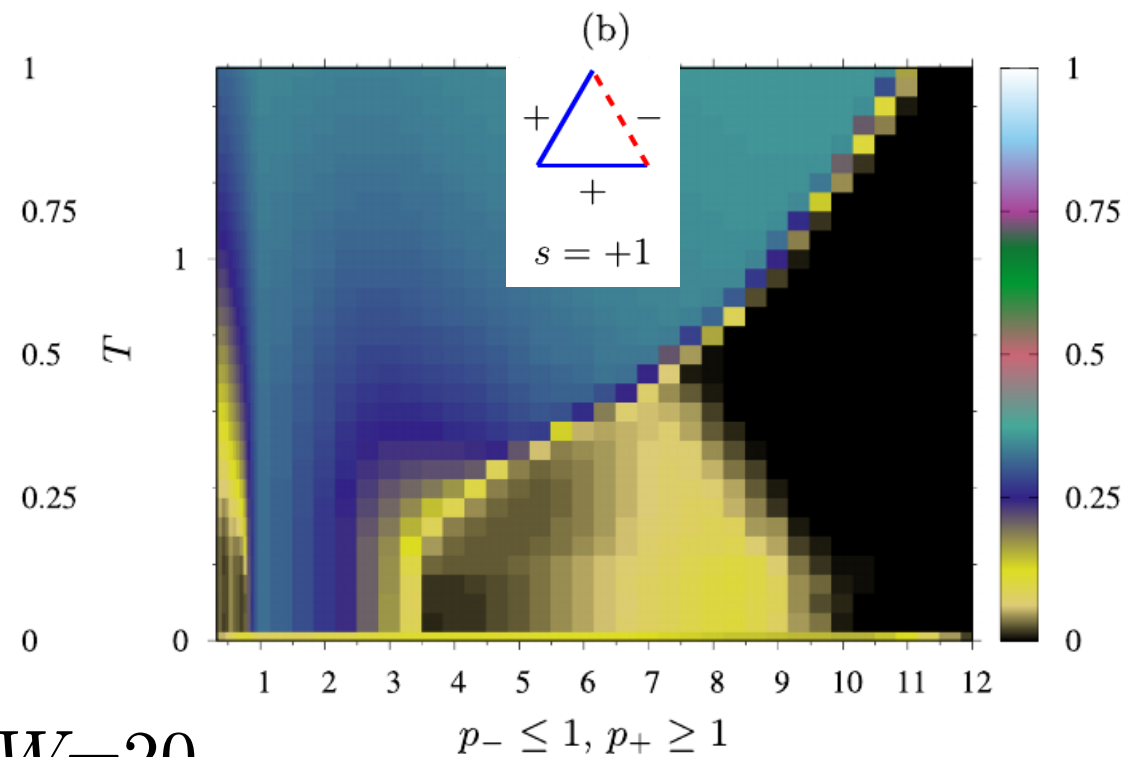
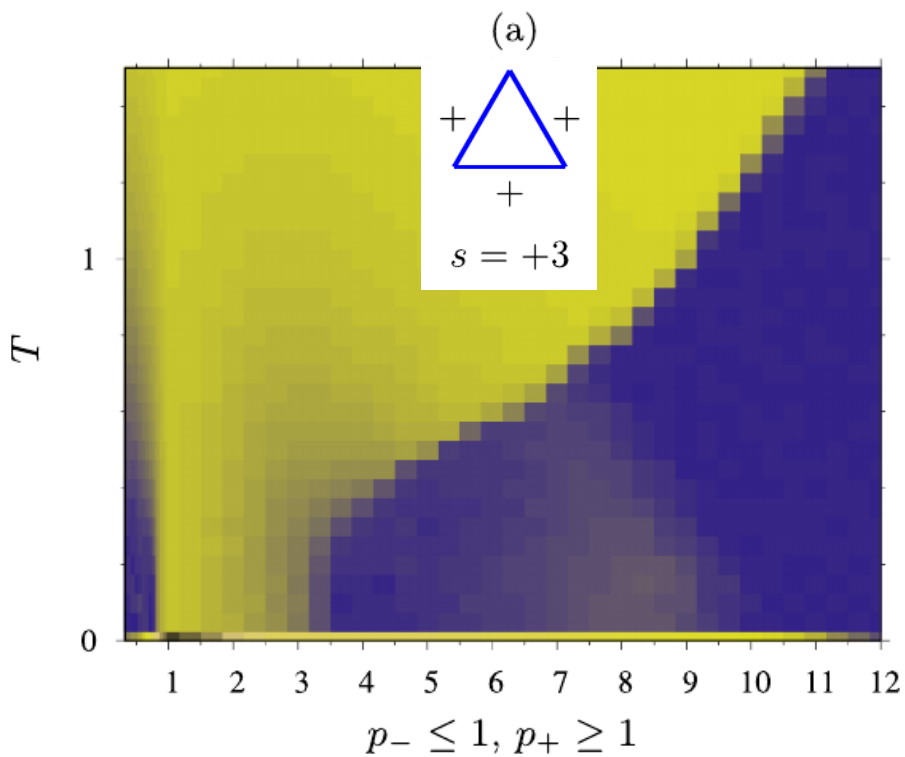
$$\bar{k}D^{5/2}$$

$$K = 1 - \frac{\langle U^4 \rangle}{3\langle U^2 \rangle^2}$$





$W=20$



Podsumowanie

- w przeciwieństwie do grafu pełnego, na sieci trójkątnej brak oznak przejścia fazowego
→ struktura sieci trójkątnej wyklucza osiągnięcie równowagi Heidera (nawet częściowej)
- przejście fazowe 1. rodzaju w sieciach typu ETL powyżej pewnej wartości gęstości grafu
- *crossover* do stanu częściowo zrównoważonego w sieciach DTL i niektórych ETL

Podziękowania

Krzysztof Kułakowski
Krzysztof Malarz

