Fizyka bez stałych fizycznych

Edward Kapuścik

WFiIS AGH

24 marzec 2014

Fizycy stale zajęci są różnorakimi pomiarami. Pomiary wymagają opracowania określonych metod pomiarowych oraz przyjęcia pewnych jednostek, przy pomocy których wyrażamy wyniki pomiarów. Jednostki w zasadzie są dowolne i wybierane są w oparciu o pewne praktyczne przesłanki.
Wyniki pomiarów dostarczają nam wartości wielkości fizycznych. Porównując wartości różnych wielkości często znajdywane są pewne relacje funkcyjne między wielkościami fizycznymi.

Relacje między wielkościami fizycznymi mogą mieć różny charakter. Spośród różnych typów relacji wyróżniają się takie, w których oprócz wielkości fizycznych występują tylko operacje różniczkownia tych wielkości, przy czym z reguły występują jedynie pochodne pierwszego rzędu. Przyczyną tego jest fakt, że relacje różniczkowe pierwszego rodzaju mają proste uogólnienia dla dowolnych układów współrzędnych, co ma podstawowe znaczenie dla uogólniania różnych praw fizyki na przypadek ogólnej teorii względności.
Inną grupę relacji między wielkościami fizycznymi tworzą relacje bez pochodnych i ze wzgledów wymiarowych relacje te muszą zawierać różnego rodzaju stałe fizyczne.

Stałe te możemy podzielić na trzy grupy:
1) Stałe szczegółowe.
2) Stałe ogólne.
3) Stałe fundamentalne.

Stałe szczegółowe wystepują wyłącznie w pojedyńczych przypadkach lub dla pojedyńczych zjawisk. Dla przykładu rozważmy związek między pędem i prędkością dla pojedyńczej cząstki

$$\vec{p} = M\vec{v}$$

Występująca tu masa cząstki M jest stałą odnoszącą się tylko do jednej cząstki. Dla innej cząstki będziemy mieli do czynienia z inną masą. czyli z inną stałą szczególną.
Podobnie jest dla związku między polem elektrycznym E i polem przesunięcia D postaci

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E}.$$

Wystepująca tu stała dielektryczna ϵ odnosi się tylko do jednego ośrodka, a więc jest to stała szczegółowa. Dla innego ośrodka będziemy mieli inną stałą.
Innym przykładem są współczynniki elastyczności. Dla różnych ciał mamy inne stałe elastyczności.

Stałe ogólne odnoszą się do do pewnej klasy obiektów lub zjawisk. Do takich stałych zaliczyć trzeba stałe sprzężenia oddziaływań fundamentalnych, gdyż są one charakterystyczne dla zjawisk, w których występują poszczególne oddziaływania jak ładunek elektryczny e dla oddziaływań elektromagnetycznych, stała Fermiego G_F charakteryzująca słabe oddziaływania, czy stała grawitacyjna G dla wszystkich oddziaływań grawitacyjnych.

Stałe uniwersalne są to stałe nie mające związku z żadnym szczegółowym obiektem czy zjawiskiem. Są one związane wyłącznie z własnościami świata fizycznego.
Im większa liczba stałych tym mniejsze nasze rozumienie zjawisk, gdyż nasze niezrozumienia maskujemy poprzez wprowadzanie fenomenologicznych stałych fizycznych. W idealnym przypadku kompletnych teorii, o których marzy wielu fizyków powinny zniknąć wszystkie stałe szczegółowe. Wszystkie stałe szczegółowe będą wyrażać się przez stałe ogólne i fundamentalne.
Można w takich marzeniach posunąć się jeszcze o krok dalej i pomarzyć o takim rozwoju fizyki, w którym w podstawowych prawach fizyki nie będziemy korzystac i ze stałych ogólnych. Pozostaną wówczas tylko stałe fundamentalne.

Przykładem uasadniającym takie marzenia może służyć historia stałej Rydberga, która w początkowym okresie fizyki atomowej uważana była za fundmentalną stałą przyrody. Później, model atomu Bohra pozwolił pokazać, że

$$Ry = \frac{me^4}{2\hbar^2}$$

Jednak droga do takiego stanu fizyki, w którym nie byłoby innych stałych fizycznych oprócz stałych fundamentalnych jest jeszcze daleka.

Znacznie prościej jest wykazać, że istnieje taka postać fundamentalnych praw fizyki, w której nie występują stałe fizyczne.

Rozpoczniemy od mechaniki klasycznej opartej na fundamentalnych równaniach

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \vec{v}(t)$$

$$\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = \vec{F}(t)$$

Tutaj, jak zwykle, $\vec{x}(t)$, $\vec{v}(t)$, $\vec{p}(t)$ i $\vec{F}(t)$ są odpowiednio wektorami opisującymi trajektorię, prędkość, pęd punktu materialnego i działającą na niego siłę.

Widać, że w podstawowych równaniach mechaniki nie ma żadnej stałej fizycznej. Wszystkie stałe pojawiają się na etapie, w którym stosujemy te podstawowe równania do jakiegokolwiek konkretnego problemu. Na przykład, kiedy korzystamy ze związku między pędem i prędkościa postaci

$$\vec{p} = M\vec{v}$$

czy też z jakiegokolwiek prawa sił postaci

$$\vec{F}(t) = \vec{F}(\vec{x}(t))$$

Powstaje pytanie czy jest to odosobniony przypadek wśród teorii fizycznych czy też raczej ogólny fakt.

By przybliżyć się do właściwej odpowiedzi popatrzmy na podstawowe równania elektrodynamiki, czyli na równania Maxwella. Mają one postać

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$div\vec{B} = 0$$

$$rot\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}$$

$$div\vec{D} = \rho$$

Tutaj $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{D}$ i $\vec{H}$ są wielkościami opisującymi pole elektromagnetyczne, zaś ρ i $\vec{j}$ opisują źródła tego pola.

I znowu widać, że podstawowe równania elektrodynamiki nie zawierają stałych fizycznych. Nawet prędkość światła c nie występuje w tych równaniach.
Stałe fizyczne pojawiają się w procesie stosowania fundamentalnych praw elektrodynamiki do konkretnych sytuacji fizycznyh, gdyż wówczas musimy skorzystać z tzw. równań materiałowych postaci

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}, \vec{B})$$

$$\vec{H} = \vec{H}(\vec{E}, \vec{B})$$

W nowszej nomenklaturze równania materiałowe nazywa się **związkami konstytucyjnymi** teorii, gdyż związki te w każdym przypadku określają konkretny kształt teorii.

Podobna sytuacja ma miejsce w przypadku termodynamiki, gdzie wszystkie jej podstawowe prawa można wyprowadzić z tzw. równań Maxwella

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V \qquad = \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = +\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p \qquad = \frac{\partial^2 H}{\partial S \partial p}$$

$$+\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \qquad = -\frac{\partial^2 A}{\partial T \partial V}$$

$$-\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \qquad = \frac{\partial^2 G}{\partial T \partial p}$$

gdzie potencjały jako funkcje ich naturalnych zmiennych termicznych i mechanicznych to:
$U(S,V)$ — Energia wewnętrzna
$H(S,p)$ — Entalpia
$A(T,V)$ — Energia swobodna Helmholtza
$G(T,p)$ — Entalpia swobodna

Reasumując, możemy powiedzieć, że zarówno w przypadku mechaniki Newtona jak i elektrodynamiki Maxwella oraz termodynamiki podstawowe równania nie zawierają żadnych stałych fizycznych. To gwarantuje uniwersalność tych teorii.

Powstaje pytanie: dlaczego tej własności nie posiadają podstawowe równania innych działów fizyki, a w szczególności podstawowe równania mechaniki kwantowej oraz teorii grawitacji Einsteina?

Rozważania rozpoczniemy od mechaniki kwantowej w wersji Heisenberga. Standardowo teoria ta zbudowana jest na następujacych relacjach:

$$[p_i, q_j] = i\hbar\delta_{i,j}$$

oraz równaniach ewolucji

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H, q_i],$$

$$\frac{dp_j}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H, p_j].$$

Tutaj wielkości q_i, p_j są operatorami położeń i pędów rozpatrywanych cząstek, zaś H jest operatorem Hamiltona, reprezentującym energię układu cząstek. W tych podstawowych relacjach figuruje stała uniwersalna $\hbar$. Dodatkowe stałe pojawią się w konkretnej postaci Hamiltonianu $H = H(p_j, q_i)$ jako funkcji podstawowych wielkości p_j i q_i, np.

$$H = \frac{p^2}{2M} + \frac{kx^2}{2}$$

dla oscylatora harmonicznego.

Łatwo zauważyć, że powyższy schemat można przeformułować w postaci

$$[p_i, q_j] = i\Lambda\delta_{i,j},$$

$$[p_i, \Lambda] = [q_i, \Lambda] = 0,$$

Oznacza to, że mamy do czynienia z algebrą z jednym centralnym elementem. W tej algebrze nie występuje żadna stała fizyczna. Wiadomo, że w kazdej nieprzywiedlnej reprezentacji takiej algebry element Λ reprezentowany jest przez operator proporcjonalny do operatora jednostkowego i tą stałą propocjonalności jest stała Plancka. Nasze sformułowanie dopuszcza jednak i inne reprezentacje i to jest ewidentna zaleta naszego podejścia. Na przykład, możemy rozpatrywać algebry, w których zamiast stałej Λ wprowadzamy pewną funkcję współrzędnych i to doprowadzi nas do mechaniki kwantowej, w której w różnych częściach przestrzeni efekty kwantowe będą występować z różnym natężeniem.

Nie jest to znowu taki rewolucyjny pomysł. Wystarczy przypomnieć sobie, że w elektrodynamice niektórych niejednorodnych ośrodków korzystamy ze związków konstytucyjnych postaci

$$\vec{D}(\vec{x}, t) = \epsilon(\vec{x}, t)\vec{E}(\vec{x}, t).$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \mu(\vec{x}, t)\vec{H}(\vec{x}, t).$$

Uzmienniona stałe dielektryczna i magnetyczna opisują niejednorodności ośrodka. W konsekwencji prowadzi to do zmiennej prędkości światła c w takim ośrodku, gdyż

$$c^2\epsilon\mu = 1.$$

Uzmiennianie stałych fizycznych jest szeroko stosowane w fizyce. Jednakże nie dotyczy to z reguły stałych fundamentalnych. Aby możliwym było uzmiennianie stałych fundamentalnych, zawsze musimy wychodzić z takiej postaci podstawowych równań, w których na początkowym etapie nie ma żadnych stałych fizycznych. Możemy to zilustrować na przykładzie mechaniki punktu materialnego ze zmienną w czasie masą. Dla prawidłwego rozważania takiego przypadku należy wyjść z równania

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

a nie z najbardziej popularnej postaci równania Newtona

$$M\vec{a} = \vec{F}.$$

Przejdźmy zatem do mechaniki falowej. W nierelatywistycznym przypadku podstawowym równaniem jest równanie Schroedingera

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\triangle\psi(\vec{x},t)+V(\vec{x},t)\psi(\vec{x},t)=i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{x},t)}{dt},$$

w którym występuje i fundamentalna stała $\hbar$ jak i stała szczegółowa M.

Obecność stałych sugeruje, że mamy do czynienia nie z pierwotną postacią fundamentalnego równania a raczej z postacią wynikłą po skorzystaniu z pewnych równań konstytucyjnych.

Przypomnijmy, że aby mieć do czynienia z fundamentalną teorią musimy operować dostateczną listą podstawowych pojęć fizycznych. W mechanice Newtona tymi podstawowymi pojęciami są pojęcia trajektorii, prędkości, pędu i działającej siły, a nie skrócona lista zawierająca tylko przyspieszenie i działającą siłę. Przy tej skróconej liście mamy do czynienia z równaniem

$$M\vec{a} = \vec{F}$$

zawierającym stałą fizyczną M. Ale trzeba pamiętać, że skorzystaliśmy z relacji $\vec{p} = M\vec{v}$.

Podobnie jest w przypadku elektrodynamiki gdzie listę podstawowych pojęć tworzą pola elektromagnetyczne $\vec{E}, \vec{B}, \vec{D}$ i $\vec{H}$ a nie skrócona lista zawierająca tylko pola $\vec{E}$ i $\vec{B}$. Aby pracować tylko z tymi polami musimy skorzystac z równań konstytucyjnych typu

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

i

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$$

gdzie $\vec{P}$ i $\vec{M}$ są, odpowiednio, polami polaryzacji i magnetyzacji.

Wówczas równania Maxwella przybierają postać

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$div\vec{B} = 0$$

$$rot\vec{B} = \epsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0\left(rot\vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{j}\right)$$

$$div\vec{E} = \frac{\rho - div\vec{P}}{\epsilon_0}$$

usupełnione relacjami konstytucyjnymi typu $\vec{P} \equiv \vec{P}\left(\vec{E}, \vec{B}\right)$, $\vec{M} \equiv \vec{M}\left(\vec{E}, \vec{B}\right)$, w których pojawią się wszystkie konieczne stałe fizyczne.

Powstaje pytanie:

Jak wybrać podstawowe wielkości fizyczne tak, by zapisywane przy ich pomocy podstawowe prawa fizyki nie zawierałyby żadnych stałych fizycznych?

Kluczem do znalezienia odpowiedzi na to pytanie są:

WŁASNOŚCI SYMETRII ROZPATRYWANYCH ZJAWISK FIZYCZNYCH

Wszystkie symetrie opisywane są teorią grup. Obecnie wiemy już, że wszystkie fundamentalne symetrie fizyczne są **lokalnymi symetriami**. Oznacza to, że nosicielami takich symterii są **lokalne pola**. Pola te tworzą reprezentacje podstawowych symetrii, Na szczęscie, obecnie znane są wszystkie reprezentacje.

Oznaczmy przez $\Psi_\alpha(x)$ zespół pól opisujących podstawowe symetrie rozpatrywanych zjawisk. Oprócz tego pola $\Psi_\alpha(x)$ mogą posiadać jeszcze inne interpretacje, w zależności od konkretnej sytuacji. Tutaj symbol α oznacza, w ogólności, pewien zespół indeksów.

Pola $\Psi_\alpha(x)$ propagują się w przestrzeni i propagacja ta jest opisywana równaniami ewolucji. Dla zapisu tych równań ewolucji potrzebny jest inny zespół pól $\Phi_{\beta(x),\nu}$, opisujący szybkość czasoprzestrzennej ewolucji podstawowych pól $\Psi_\alpha(x)$.

Związek między polami $\Psi_\alpha(x)$ i $\Phi_{\beta.\nu}(x)$ ma postać

$$K^{\alpha,\mu}_{\beta,\nu} \nabla_\mu \Psi_\alpha(x) = \Phi_{\beta,\nu}(x), \tag{1}$$

gdzie $K^{\alpha,\mu}_{\beta,\nu}$ są pewnymi liczbowymi współczynnikami, tworzącymi reprezentacje fundamentalnych symetrii. Dla powtarzających się indeksów stosujemy konwencję Einsteina o sumowaniu. Symbolem ∇_μ osnaczylismy pewien rodzaj pochodnych kowariantnych.

Wybór współczynników $K^{\alpha,\mu}_{\beta,\nu}$ uzgadnia reprezentacje pól Ψ i Φ, tak, by powyższe równania ewolucji były kowariantne względem transformacji symetrii.

Dla sformułowania praw dynamiki musimy wprowadzić jeszcze dwa zespoły pól: pola $\Pi^{\mu}_{\rho}(x)$ będącymi nośnikami wielkości dynamicznych (takich jak pęd czy energia) oraz pola $\Omega_{\rho}(x)$, opisujące wpływ czynników zewnętrznych (takich jak np.siły zewnetrzne). Równania dynamiki mają postać

$$\nabla_{\mu}\Pi^{\mu}_{\rho}(x) = \Omega_{\rho}(x) \tag{2}$$

Równania (1) i (2) uzupełniane są odpowiednimi związkami konstytucyjnymi.

Pokażemy teraz, że z równan (1) i (2) wynikają wszystkie znane i używane w fizyce fundamentalne równania. Dla równań opisujących obiekty materialne zawsze

$$K^{\alpha,\mu}_{\beta,\nu} = \delta^{\alpha}_{\beta}\delta^{\mu}_{\nu}$$

i w związku z tym równania (1) przyjmują postać

$$\nabla_{\mu}\Psi_{\alpha}(x) = \Phi_{\alpha,\mu}(x),$$

Poza tym dla płaskich czasoprzestrzeni zamiast uogólnionych pochodnych ∇_{μ} mamy do czynienia ze zwykłymi pochodnymi cząstkowymi ∂_{μ}

Dla otrzymania równań mechaniki punktu materialnego przyjmujemy $\alpha \in \{1, 2, 3\}$

$$\Psi_1(t) = x(t), \Psi_2(t) = y(t), \Psi_3 = z(t)$$

$$\Phi_{1,0}(t) = v_1(t), \Phi_{2,0} = v_2(t), \Phi_{3,0} = v_3(t)$$

$$\Pi_1^0(t) = p_1(t), \Pi_2^0(t) = p_2(t), \Pi_3^0(t) = p_3(t)$$

$$\Omega_1(t) = F_1(t), \Omega_2(t) = F_2(t), \Omega_3(t) = F_3(t),$$

gdzie zastosowaliśmy powszechnie używane symbole oraz uwzgledniliśmy fakt, że w mechanice wszystkie wielkości są zależne tylko od zmiennej czasowej. Łatwo sprawdzić, że z równnań (1) i (2) wynikają standardowe równania Newtona.

W przypadku skalarnej funkcji falowej $\Psi(x)$ indeksy α, β i γ nie występują i aby otrzymać równania Schroedingera należy przyjąć

$$\Pi^0(x) = i\hbar\Psi(x), \Pi^k(x) = -\frac{\hbar^2}{2M}\Phi_k(x), \Omega(x) = -V(x)\Psi(x)$$

i zastosować równania (1) i (2).

Dla otrzymania równania Kleina-Gordona

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\Psi + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\Psi = F\left(\Psi\right)$$

należy przyjąć

$$\Pi^{\mu}(x) = g^{\mu,\nu}\Phi_{\nu}(x)$$

$$\Omega(x) = -\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\Psi(x) + F\left(\Psi(x)\right),$$

gdzie $F(\Psi)$ opisuje samooddziaływanie pola skalarnego.

W przypadku równania Diraka

$$\gamma^\mu \partial_\mu \Psi + \frac{imc}{\hbar}\Psi = 0$$

mamy $\alpha \in \{1, 2, 3, 4\}$ (gdyż $\Psi \equiv \{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4\}$) i należy przyjąć

$$\Pi^\mu_\alpha(x) = g^{\mu,\nu}\gamma_\nu^{\alpha,\beta}\Psi_\alpha(x)$$

$$\Omega_\alpha(x) = -\frac{mc}{\hbar}\Psi_\alpha(x),$$

gdzie γ są słynnymi macierzami Diraka.

Dla elektrodynamiki kolektywny indeks α jest parą czasoprzestrzennych indeksów i należy wybrać

$$K^{\mu\nu\lambda}_{\epsilon\eta\rho} = \delta^{\mu}_{\epsilon}\delta^{\nu}_{\eta}\delta^{\lambda}_{\rho} + \delta^{\mu}_{\eta}\delta^{\nu}_{\rho}\delta^{\lambda}_{\epsilon} + \delta^{\mu}_{\rho}\delta^{\nu}_{\epsilon}\delta^{\lambda}_{\eta}.$$

Oznaczając podstawowe pola Ψ_α przez $F_{\mu,\nu}$ i przyjmując

$$\Phi(x) = 0$$

otrzymujemy równania Maxwella

$$\partial_\mu F_{\nu,\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda,\mu} + \partial_\lambda F_{\mu,\nu} = 0.$$

Dla otrzymania niejednorodnych równań Maxwella

$$\partial_\mu H^{\mu,\nu}(x) = J^\nu(x)$$

należy przyjąć indeks γ jako indeks czasoprzestrzenny i zidentyfikować

$$\Pi_\gamma^\mu(x) = g_{\gamma,\lambda} H^{\lambda,\mu}(x)$$

$$\Omega_\gamma(x) = g_{\gamma,\nu} J^\nu(x).$$

Bardziej skomplikowana sytuacja jest w przypadku teorii grawitacji Einsteina. Przyjmując, że podstawowymi polami jest tensorowe pole $R^{\alpha}_{\beta,\gamma,\eta}(x)$, które możemy zinterpretować jako tensor krzywizny czasoprzestrzeni, musimy mieć w teorii tzw. tożsamości Bianchci'ego typu:

$$\nabla_{\lambda} R^{\alpha}_{\beta,\gamma,\eta}(x) + \nabla_{\gamma} R^{\alpha}_{\beta,\eta,\lambda}(x) + \nabla_{\eta} R^{\alpha}_{\beta,\lambda,\gamma}(x) = 0$$

z pewną pochodną kowariantną ∇.

Takie zależności łatwo otrzymać z naszych równań (1) jeśli przyjąć, że wszystkie indeksy są indeksami czasoprzestrzennymi i jesłi przyjąć, że

$$K^{\alpha\beta\mu\nu\lambda}_{\gamma\omega\epsilon\eta\rho} = \delta^{\alpha}_{\gamma}\delta^{\beta}_{\omega}\left(\delta^{\mu}_{\epsilon}\delta^{\nu}_{\eta}\delta^{\lambda}_{\rho} + \delta^{\mu}_{\eta}\delta^{\nu}_{\rho}\delta^{\lambda}_{\epsilon} + \delta^{\mu}_{\rho}\delta^{\nu}_{\epsilon}\delta^{\lambda}_{\eta}\right).$$

Podobnie, jak w przypadku elektrodynamiki, przyjmujemy, że wszystkie pola typu Φ są równe zeru.

Jeśli chodzi o równania dynamiczne to jedynym kandydatem dla takiego równania, które łatwo można wbudować w nasz schemat, to równania zachowania, czy równanie ciągłości dla tensora energii-pędu

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0.$$

Powstaje jednak pytanie o to, gdzie wobec tego odnaleźć równania Einsteina

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^2} T^{\mu\nu},$$

na których opiera się cała współczesna teoria grawitacji?

Odpowiedź na to pytanie łatwo można znaleźć jeśli zauważyć, że równania ciągłości dla tensora energii-pędu można rozwiązać w postaci

$$T^{\mu\nu} = Q^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} Q, \tag{3}$$

gdzie Q jest zwężeniem tensora $Q^{\mu\nu}$, zaś tensor $Q^{\mu\nu}$ jest zwężeniem tensora $Q^{\alpha}_{\mu\beta\nu}$ względem pierwszego i trzeciego indeksu, czyli tak samo jak tensor Ricci'ego jest związanym z tensorem krzywizny. Tensor $Q^{\alpha}_{\mu\beta\nu}$ jest proporcjonalny do tensora krzywizny. Przyjmując, że ten współczynnik proporcjonalności jest równy

$$\frac{c^2}{8\pi G}$$

równanie (3) przechodzą w równania Einsteina

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^2} T^{\mu\nu}.$$

Równanie Einsteina nia zawiera pochodnych. Wyraża ono zwykłą propocjonalność dwóch tensorów $G^{\mu\nu}$ i $T^{\mu\nu}$. Jest to typowy przypadek związków konstytucyjnych. Jest to nieoczekiwany rezultat naszego podejścia do równań ewolucji i zwiazków konstytucyjnych.

W naszym podejściu można skonstruować i ogólniejsze teorie grawitacji, w której związek między tensorami $Q^{\alpha}_{\beta\gamma\eta}$ i $R^{\alpha}_{\beta\gamma\eta}$ jest bardziej skomplikowany.