Powracanie w parach

Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza
Kraków.

WFiIS AGH, 7 czerwca 2013

Interview with
Louis Nirenberg
(Notices AMS, 2002)

- [...] I myself don't understand so very well. I remember meeting a young Frenchman years ago, and he had been trying to do research for several years.
- He asked me, "How do you do research?
How do you start on a problem?"
- I said, "Well, sometimes it happened to me that I read a paper and I didn't like the proof. So I started to think about something that might be more natural, and very often this led to some new work."
- Then I asked him, "What about your case?"
- He said,"I never found a proof I didn't like."
- I thought, "This is hopeless!"

Układ dynamiczny

1. X – zawsze zwarta przestrzeń metryczna (X, d).
2. $f : X \to X$ – zawsze ciągłe odwzorowanie.
3. standardowo, kolejne iteracje oznaczamy $f^0(x) = x$, $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$.
4. $O_f(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots\}$ – orbita punktu x.
5. Zbiory czasów przejścia:
   1. $N_f(U, V) = \{n : f^n(U) \cap V\} \neq \emptyset$.
   2. $N_f(x, V) = \{n : f^n(x) \in V\}$.

Powracanie i jednostajne powracanie

1. x jest powracający gdy $N_f(x,U) \neq \emptyset$ dla dowolnego otwartego otoczenia $U \ni x$
2. x jest **jednostajnie** powracający gdy dodatkowo $N_f(x,U)$ jest syndetyczny, tzn. istnieje $k>0$ takie, że

$$N_f(x,U) \cap [i, i+k] \neq \emptyset \qquad \text{dla każdego } i \geq 0.$$

3. x jest jednostajnie powracający gdy $\overline{O_f(x)}$ jest zbiorem minimalnym, tzn. jeśli zbiór $M \subsetneq \overline{O_f(x)}$ spełnia
   1. M jest domknięty
   2. $M \neq \emptyset$,
   3. $f(M) \subset M$.

   to $M = \overline{O_f(x)}$ (tzn. nie ma właściwych podzbiorów o tych trzech własnościach).

Przykłady układów dynamicznych i punktów powracających

1. orbita okresowa
2. obrót o kąt niewymierny na okręgu

Twierdzenie Poincaré o powracaniu

Jeśli μ jest niezmienniczą i skończoną miarą Borelowską (tzn. $\mu(f^{-1}(A)) = A$) dla układu dynamicznego (X, f) to μ-prawie każdy punkt X jest rekurencyjny.

3. odwzorowanie namiotowe $T\colon [0,1] \to [0,1],\ T(x) = 1 - |1-2x|$.
4. odwzorowanie "kocie" Arnolda: $S\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$,
   $S(x,y) = (2x+y, x+y)$ mod 1.

Przykłady układów dynamicznych i punktów powracających

1. orbita okresowa
2. obrót o kąt niewymierny na okręgu
3. odwzorowanie namiotowe $T\colon [0,1] \to [0,1]$, $T(x) = 1 - |1 - 2x|$.
4. odwzorowanie "kocie" Arnolda: $S\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$,
   $S(x,y) = (2x + y, x + y) \bmod 1$.

Twierdzenie Furstenberga o wielokrotnym powracaniu

Niech μ będzie niezmienniczą i skończoną miarą Borelowską (tzn. $\mu(f^{-1}(A)) = A$) dla układu dynamicznego (X, f) oraz niech f będzie odwracalne (f i f^{-1} mierzalne). Dla każdego zbioru $\mu(E) > 0$ oraz $k > 0$ istnieje $x \in X$ oraz $n > 0$ take, że

$$x, f^n(x), f^{2n}(x), \ldots, f^{kn}(x) \in E$$

Powracanie w parach (Product recurrence)

Hillel Furstenberg
(Oberwolfach – 1972)

1. $x \in X$ ma własność powracania w parach gdy
   1. dla dowolnego punktu powracającego y
   2. w dowolnym układzie dynamicznym (Y, g)
   3. oraz dowolnych otoczeń otwartych U punktu x i V punktu y,
   4. $N_f(x, U) \cap N_g(y, V) \neq \emptyset$.

Pełna charakteryzacja - twierdzenie Furstenberga

1. $x, y \in X$ są proksymalne gdy $\liminf_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0$.
2. x jest dystalny gdy nie jest proksymalny względem żadnego $y \in \overline{O_f(x)}$, $y \neq x$.
3. układ (X, f) jest dystalny jeśli każdy punkt $x \in X$ jest dystalny.

Twierdzenie

Jeśli x jest dystalny to jest także jednostajnie powracający (tzn. $\overline{O_f(x)}$ jest zbiorem minimalnym).

Twierdzenie (Furstenberg)

Punkt x ma własność powracania w parach wtedy i tylko wtedy gdy jest (jednostajnie powracającym) punktem dystalnym.

Pełna charakteryzacja - twierdzenie Furstenberga

1. $x, y \in X$ są proksymalne gdy $\liminf_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0$.
2. x jest dystalny gdy nie jest proksymalny względem żadnego $y \in \overline{O_f(x)}$, $y \neq x$.
3. układ (X, f) jest dystalny jeśli każdy punkt $x \in X$ jest dystalny.

Twierdzenie

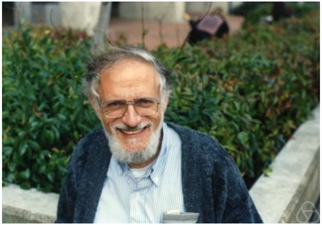
Jeśli x jest dystalny to jest także jednostajnie powracający (tzn. $\overline{O_f(x)}$ jest zbiorem minimalnym).

Twierdzenie (Furstenberg)

Punkt x ma własność powracania w parach wtedy i tylko wtedy gdy jest (jednostajnie powracającym) punktem dystalnym.

Weak product recurrence

Joseph Auslander



Hillel Furstenberg

1. $x \in X$ ma własność **słabego powracania w parach** gdy
   1. dla dowolnego punktu **jednostajnie** powracającego y w dowolnym (Y, g)
   2. i dowolnych otoczeń otwartych $x \in U$ oraz $y \in V$,
   3. $N_f(x, U) \cap N_g(y, V) \neq \emptyset$.

Question

„Another question (even for $\mathbb{Z}$ or $\mathbb{N}$ actions): If (x, y) is recurrent for all uniformly recurrent points y, is x necessarily a distal point?"

[J. Auslander and H. Furstenberg, *Product recurrence and distal points*, Trans. Amer. Math. Soc., **343** (1994) 221–232.]

Twierdzenie Haddada i Otta

Twierdzenie

Niech (X, f) będzie układem dynamicznym. Punkt $x \in X$ który spełnia poniższe warunki ma słabą własność powracania w parach:

- dla każdego otwartego otoczenia $x \in V$ istnieje $n = n(V) \in \mathbb{N}$ takie, że
- gdy $S \subset \mathbb{N}$ jest dowolnie ustalonym zbiorem spełniającym $|s - t| > n$ dla wszystkich różnych $s, t \in S$,
- to istnieje $l \in \mathbb{N}$ takie, że $f^{l+s}(x) \in V$ dla wszystkich $s \in S$.

[*Recurrence in pairs*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **28** (2008) 1135–1143]

Twiedzenie H-O; przeformułowanie

Wniosek

Punkt $x \in X$ ma słabą własność powracania w parach, gdy:

1. Orbita punktu x jest gęsta w X.
2. Dla każdego otoczenia $x \in V$ istnieje N takie, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ i dowolnych $n_i \geq N$, gdzie $1 \leq i \leq k$, zachodzi

$$V \cap f^{-n_1}(V) \cap \ldots \cap f^{-(n_1+\ldots+n_k)}(V) \neq \emptyset.$$

Jeśli f jest topologicznie dokładne, tzn.

- dla dowolnego zbioru otwartego U
- istnieje n dla którego $f^n(U) = X$

wtedy założenia powyższego twierdzenia są spełnione.

Pytanie (Haddad & Ott)

Czy jeśli x ma własność słabego powracania w parach i jest jednostajnie powracający, to musi być dystalny?

Twiedzenie H-O; przeformułowanie

Wniosek

Punkt $x \in X$ ma słabą własność powracania w parach, gdy:

1. Orbita punktu x jest gęsta w X.
2. Dla każdego otoczenia $x \in V$ istnieje N takie, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ i dowolnych $n_i \geq N$, gdzie $1 \leq i \leq k$, zachodzi

$$V \cap f^{-n_1}(V) \cap \ldots \cap f^{-(n_1+\ldots+n_k)}(V) \neq \emptyset.$$

Jeśli f jest topologicznie dokładne, tzn.

- dla dowolnego zbioru otwartego U
- istnieje n dla którego $f^n(U) = X$

wtedy założenia powyższego twierdzenia są spełnione.

Pytanie (Haddad & Ott)

Czy jeśli x ma własność słabego powracania w parach i jest jednostajnie powracający, to musi być dystalny?

Hierarchia własności mieszania

1. (X, f) jest tranzytywny gdy dla dowolnych niepustych zbiorów otwartych U, V istnieje $n > 0$ takie, że $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.
2. (X, f) jest (topologicznie) słabo mieszający gdy $(X \times X, f \times f)$ jest tranzytywny.
   Równoważnie: $f^n(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$ for $i = 1, \ldots, m$, $n, m > 0$.
3. f jest (topologicznie) mieszający jeśli istnieje N takie, że $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ dla $n > N$.

$$\text{Dokł.} \implies \text{Miesz.} \implies \text{S.Miesz.} \implies \text{Tran.}$$

Założenia H & O

- Układ (X, f) ma własność **(P)** gdy w dowolnym niepustym zbiorze otwartym U można wskazać $x \in U$ oraz $K > 0$ dla których zachodzi warunek:

$$f^{nK}(x) \in U \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

Twierdzenie

Jeśli punkt $x \in X$ spełnia warunki:

1. Orbita x jest gęsta w X.
2. Dla każdego otoczenia $x \in V$ istnieje N takie, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ i dowolnych $n_i \geq N$, gdzie $1 \leq i \leq k$, zachodzi

$$V \cap f^{-n_1}(V) \cap \ldots \cap f^{-(n_1+\ldots+n_k)}(V) \neq \emptyset.$$

to wtedy (X, f) ma własność **(P)** oraz jest mieszające.

Rozłączność dynamiki

1. Zbiór $\emptyset \neq J \subset X \times Y$ nazywamy połączeniem układów (X, f) i (Y, g) gdy jest niezmienniczy (dla odwzorowania $f \times g$) a jego rzutowania na odpowiednie współrzędne to zbiory X i Y.
2. Jeśli jedynym połączeniem jest $X \times Y$ to układy (X, f) i (Y, g) nazywamy rozłącznymi.

Pytanie (Furstenberg)

Czy istnieje pełna charakteryzacja układów rozłącznych ze wszystkimi minimalnymi bądź dystalnymi układami?
[H. Furstenberg, *Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in Diophantine approximation*, Math. Systems Theory, **1** (1967), 1–49]

Twierdzenie (Petersen, 1970)

Układ jest rozłączny z każdym układem dystalnym WTW gdy jest minimalnym układem słabo mieszającym.

Rozłączność dynamiki

1. Zbiór $\emptyset \neq J \subset X \times Y$ nazywamy połączeniem układów (X, f) i (Y, g) gdy jest niezmienniczy (dla odwzorowania $f \times g$) a jego rzutowania na odpowiednie współrzędne to zbiory X i Y.
2. Jeśli jedynym połączeniem jest $X \times Y$ to układy (X, f) i (Y, g) nazywamy rozłącznymi.

Pytanie (Furstenberg)

Czy istnieje pełna charakteryzacja układów rozłącznych ze wszystkimi minimalnymi bądź dystalnymi układami?
[H. Furstenberg, *Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in Diophantine approximation*, Math. Systems Theory, **1** (1967), 1–49]

Twierdzenie (Petersen, 1970)

Układ jest rozłączny z każdym układem dystalnym WTW gdy jest minimalnym układem słabo mieszającym.

Rozłączność dynamiki

1. Zbiór $\emptyset \neq J \subset X \times Y$ nazywamy połączeniem układów (X, f) i (Y, g) gdy jest niezmienniczy (dla odwzorowania $f \times g$) a jego rzutowania na odpowiednie współrzędne to zbiory X i Y.
2. Jeśli jedynym połączeniem jest $X \times Y$ to układy (X, f) i (Y, g) nazywamy rozłącznymi.

Pytanie (Furstenberg)

Czy istnieje pełna charakteryzacja układów rozłącznych ze wszystkimi minimalnymi bądź dystalnymi układami?
[H. Furstenberg, *Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in Diophantine approximation*, Math. Systems Theory, **1** (1967), 1–49]

Twierdzenie (Petersen, 1970)

Układ jest rozłączny z każdym układem dystalnym WTW gdy jest minimalnym układem słabo mieszającym.

Rozłączność z układami minimalnymi

Twierdzenie (Furstenberg, 1967)

Jeśli (X, f) jest słabo mieszający i ma gęste punkty okresowe to jest rozłączny z każdym układem minimalnym.

Twierdzenie (Huang & Ye)

Jeśli (X, f) jest słabo mieszający oraz ma własność **(P)** to jest rozłączny z każdym układem minimalnym.

Twierdzenie

Jeśli (X, f) jest słabo mieszający i ma gęsty zbiór punktów dystalnych to jest rozłączny z każdym układem minimalnym.

Twierdzenie

Jeśli (X, f) jest rozłączny z każdym układem minimalnym to każdy punkt o gęstej orbicie ma własność słabego powracania w parach.

Rozłączność z układami minimalnymi

Twierdzenie (Furstenberg, 1967)

Jeśli (X, f) jest słabo mieszający i ma gęste punkty okresowe to jest rozłączny z każdym układem minimalnym.

Twierdzenie (Huang & Ye)

Jeśli (X, f) jest słabo mieszający oraz ma własność **(P)** to jest rozłączny z każdym układem minimalnym.

Twierdzenie

Jeśli (X, f) jest słabo mieszający i ma gęsty zbiór punktów dystalnych to jest rozłączny z każdym układem minimalnym.

Twierdzenie

Jeśli (X, f) jest rozłączny z każdym układem minimalnym to każdy punkt o gęstej orbicie ma własność słabego powracania w parach.

Rozłączność z układami minimalnymi

Twierdzenie (Furstenberg, 1967)

Jeśli (X, f) jest słabo mieszający i ma gęste punkty okresowe to jest rozłączny z każdym układem minimalnym.

Twierdzenie (Huang & Ye)

Jeśli (X, f) jest słabo mieszający oraz ma własność **(P)** to jest rozłączny z każdym układem minimalnym.

Twierdzenie

Jeśli (X, f) jest słabo mieszający i ma gęsty zbiór punktów dystalnych to jest rozłączny z każdym układem minimalnym.

Twierdzenie

Jeśli (X, f) jest rozłączny z każdym układem minimalnym to każdy punkt o gęstej orbicie ma własność słabego powracania w parach.

Rozłączność z układami minimalnymi

Twierdzenie (Furstenberg, 1967)

Jeśli (X, f) jest słabo mieszający i ma gęste punkty okresowe to jest rozłączny z każdym układem minimalnym.

Twierdzenie (Huang & Ye)

Jeśli (X, f) jest słabo mieszający oraz ma własność **(P)** to jest rozłączny z każdym układem minimalnym.

Twierdzenie

Jeśli (X, f) jest słabo mieszający i ma gęsty zbiór punktów dystalnych to jest rozłączny z każdym układem minimalnym.

Twierdzenie

Jeśli (X, f) jest rozłączny z każdym układem minimalnym to każdy punkt o gęstej orbicie ma własność słabego powracania w parach.

Lokalna własność słabego mieszania

1. Domknięty zbiór $A \subset X$ o co najmniej dwóch punktach nazywamy *słabo mieszającym* gdy
   - dla każdego $m \in \mathbb{N}$, i otwartych zbiorów $V_1, \ldots, V_m$, $U_1, \ldots, U_m$
   - spełniających $A \cap U_i \neq \emptyset$, $A \cap V_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2, \ldots, m$,
   - istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że $f^k(V_i \cap A) \cap U_i \neq \emptyset$ dla $i = 1, \ldots, m$.

Twierdzenie (O. & Zhang)

Jeśli A jest zbiorem słabo mieszającym oraz punkty dystalne są gęste w A to każdy punkt $x \in A$ spełniający

$$A \subset \overline{O_f(x)}$$

ma własność słabego powracania w parach.

Pytanie (Haddad & Ott)

Jak można scharakteryzować klasę punktów z własnością słabego powracania w parach?

Lokalna własność słabego mieszania

1. Domknięty zbiór $A \subset X$ o co najmniej dwóch punktach nazywamy *słabo mieszającym* gdy
   - dla każdego $m \in \mathbb{N}$, i otwartych zbiorów $V_1, \ldots, V_m$, $U_1, \ldots, U_m$
   - spełniających $A \cap U_i \neq \emptyset$, $A \cap V_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2, \ldots, m$,
   - istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że $f^k(V_i \cap A) \cap U_i \neq \emptyset$ dla $i = 1, \ldots, m$.

Twierdzenie (O. & Zhang)

Jeśli A jest zbiorem słabo mieszającym oraz punkty dystalne są gęste w A to każdy punkt $x \in A$ spełniający

$$A \subset \overline{O_f(x)}$$

ma własność słabego powracania w parach.

Pytanie (Haddad & Ott)

Jak można scharakteryzować klasę punktów z własnością słabego powracania w parach?