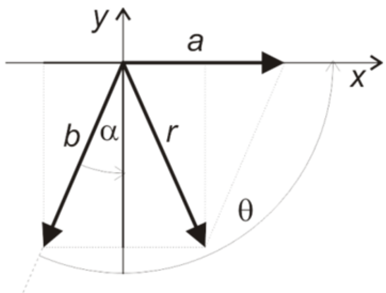
Rachunek wektorowy

1. Co można powiedzieć o dwóch wektorach $\vec{a}$ i $\vec{b}$ spełniających związki:
   a) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ oraz $a+b=c$,
   b) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}-\vec{b}$,
   c) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ oraz $a^2+b^2=c^2$
2. Dane są dwa wektory: $\vec{a}=3\vec{\imath}+4j+5\vec{k}$, $\vec{b}=-\vec{\imath}+\vec{k}$. Obliczyć:
   a) długość każdego wektora
   b) sumę wektorów
   c) iloczyn skalarny, $\vec{a}\cdot\vec{b}$
   d) iloczyn wektorowy, $\vec{a}\times\vec{b}$
   e) kąt zawarty między wektorami
   Odp.: (a) $5\sqrt{2},\sqrt{2}$; (b) $2\vec{\imath}+4\vec{\jmath}+6k$; (c) 2; (d) $4\vec{\imath}-8\vec{\jmath}+4\vec{k}$; (e) $\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})=0.2$
3. Wektor $\vec{a}$ ma wartość 5 jednostek i jest skierowany na wschód. Wektor $\vec{b}$ jest skierowany w kierunku zachodnim, pod kątem 45° do kierunku północy i ma wartość czterech jednostek. Skonstruować wykresy wektorów by obliczyć: (a) $(\vec{a}+\vec{b})$; (b) $(\vec{b}-\vec{a})$. Oszacuj wartości i zwroty $(\vec{a}+\vec{b})$ i $(\vec{b}-\vec{a})$ z wykresów.
   Odp.: (a) ~ 3.9, w kierunku wschodnim, pod kątem $\sim 43°$ od kierunku północy; (b) ~ 8.4, w kierunku zachodnim, pod kątem $\sim 70°$ od kierunku północy.
4. Znaleźć sumę przemieszczeń wektorowych $\vec{c}$ i $\vec{d}$, których składowe wzdłuż trzech wzajemnie prostopadłych kierunków wynoszą w km: $c_x=5$, $c_y=0$, $c_z=-2$; $d_x=-3$, $d_y=4$, $d_z=6$.
   Odp.: $r_x=2$ km, $r_y=4$ km, $r_z=4$ km.
5. Dwa wektory o długościach a i b, których początki stykają się ze sobą, tworzą kąt θ. Udowodnić, znajdując ich składowe wzdłuż dwu prostopadłych osi, że długość wektora wypadkowego wynosi: $r=\sqrt{a^2+b^2+2abcos\theta}$.



6. Niech N będzie liczbą całkowitą większą od jedności, wówczas:
   $$\cos 0+\cos\frac{2\pi}{N}+\cos\frac{4\pi}{N}+\ldots+\cos(\mathrm{N}-1)\frac{2\pi}{N}=0$$
   to znaczy
   $$\sum_{n=0}^{n=N-1}\cos\frac{2\pi n}{N}=0$$
   podobnie
   $$\sum_{n=0}^{n=N-1}\sin\frac{2\pi n}{N}=0$$
   Udowodnić te dwa twierdzenia, znajdując sumę N wektorów o jednostkowej długości, tak rozmieszczonych, że każdy wektor tworzy z wektorem poprzedzającym go kąt $2\pi/N$.
7. Wykazać, korzystając z prostokątnego układu współrzędnych, pokazanego na rysunku, że
   $\vec{\imath}\cdot\vec{\imath}=\vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$
   oraz
   $\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath}=\vec{\jmath}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{\imath}=0$
   a także
   $\vec{\imath}\times\vec{\imath}=\vec{\jmath}\times\vec{\jmath}=\vec{k}\times\vec{k}=0$

oraz

$\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k}, \qquad \vec{k} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath}, \qquad \vec{\jmath} \times \vec{k} = \vec{\imath}$

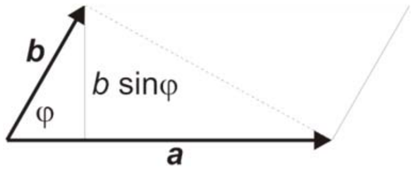
8. Korzystając ze związków podanych w Zad. 7 wykazać analitycznie, że dla dwóch wektorów przedstawionych w postaci

   $\vec{a} = \vec{\imath} a_x + \vec{\jmath} a_y + \vec{k} a_z$ oraz $\vec{b} = \vec{\imath} b_x + \vec{\jmath} b_y + \vec{k} b_z$

   zachodzi

   $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

9. Wykazać, że powierzchnia trójkąta zawartego między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$, patrz rysunek, jest równa $\frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$, gdzie pionowe kreski oznaczają wartość bezwzględną (wartość wektora).



10. Przypuśćmy, że $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ są trzema dowolnymi wektorami nie leżącymi w jednej płaszczyźnie. Nie muszą one tworzyć ze sobą kątów prostych. (a) Wykazać, że

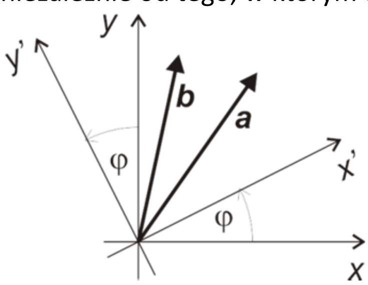
    $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right).$

    (b) Niech

    $\vec{A} = \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{v}, \vec{B} = \frac{\vec{c} \times \vec{a}}{v}, \vec{C} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{v},$

    gdzie $v = a \cdot (b \times c)$. Obliczyć wartość iloczynu skalarnego każdego z wektorów $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ z każdym z wektorów $\vec{A}, \vec{B}$ i $\vec{C}$. (c) Jakie są wymiary wektorów $\vec{A}, \vec{B}$ i $\vec{C}$, jeśli $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ mają wymiar długości.

11. Na rysunku przedstawione są dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ oraz dwa układy współrzędnych różniące się tym, że osie x i x' oraz y i y' tworzą ze sobą kąt φ. Udowodnić analitycznie, że $\vec{a} + \vec{b}$ ma zawsze taką samą wartość i kierunek, niezależnie od tego, w którym układzie wykonujemy dodawanie.



12. Pociąg jedzie z praktycznie stałą prędkością 60 km/h, najpierw dokładnie na wschód przez 40 min, następnie w kierunku północno-wschodnim pod kątem 45° do poprzedniego przez 20 min, a w końcu na zachód przez 50 min. Jaki jest średni wektor prędkości pociągu w czasie tego ruchu?

13. Dwa pociągi o jednakowych prędkościach 40 km/h jadą naprzeciw siebie po tym samym torze prostoliniowym. Z jednego z tych pociągów, w chwili gdy znajdują się one w odległości 80 km, wyfruwa ptak poruszający się z prędkością 60 km/h i dolatuje do drugiego pociągu, następnie zawraca i leci z powrotem w kierunku pierwszego pociągu, itd. (a) Ile razy zdąży on przelecieć drogę od jednego pociągu do drugiego, zanim pociągi się zderzą? Wyjaśnić. (b) Jaka jest całkowita droga przebyta przez ptaka w chwili zderzenia?

    Odp.: (a) liczba nieskończona; (b) 60 km.

14. Położenie punktu materialnego poruszającego się wzdłuż osi x zależy od czasu według równania

    $x = \frac{v_{x0}}{k}\left(1 - e^{-kt}\right),$

    w którym v_{x0} oraz k są wielkościami stałymi. (a) Zrobić wykres zależności x od t. Zauważyć, że w chwili $t = 0$ położenie $x = 0$, a w chwili $t = \infty$ położenie $x = v_{x0}/k$, co znaczy, że całkowita odległość, jaką przebywa punkt, jest równa v_{x0}/k. (b) Pokazać, że prędkość v_x jest dana równaniem

    $v_x = v_{x0} e^{-kt},$

    czyli maleje wykładniczo z czasem od wartości początkowej v_{x0} i staje się równa zeru po czasie nieskończonym.

    (c) Pokazać, że przyspieszenie a_x dane jest równaniem

$a_x = -kv_x,$

co znaczy, że jest ono skierowane przeciwnie niż prędkość, a jego wartość jest proporcjonalna do prędkości. (d) Opisany ruch jest ruchem o zmiennym przyspieszeniu. Spróbować wyjaśnić fizycznie, jak to jest możliwe, że potrzeba nieskończonego czasu na to, aby zatrzymać punkt, który przebywa skończoną odległość.

15. W chwili gdy sygnał świetlny na skrzyżowaniu staje się zielony, samochód rusza ze stałym przyspieszeniem a_x równym 1.8 m/s^2. W tej samej chwili dogania go i wyprzedza ciężarówka jadąca ze stałą prędkością 9 m/s. (a) Po przebyciu jakiej odległości samochód dogoni ciężarówkę? (b) Jaka będzie prędkość samochodu w tym momencie? (Wygodnie jest zrobić jakościowy wykres położenia x od czasu t dla każdego pojazdu).
    Odp.: (a) 90 m, (b) 18 m/s.