XI Funkcje własne operatora pędu. Zasada nieoznaczoności.

Z reprezentacji Schrödingera mamy: $\hat{p}_x \to -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$,

Równanie własne operatora pędu (w jednym wymiarze):

$$\hat{p} \cdot \varphi(x) = p \cdot \varphi(x)$$

$$-i\hbar \frac{d\varphi(x)}{dx} = p \cdot \varphi(x)$$

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = -\frac{p}{i\hbar}\varphi(x) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} = -\frac{p}{i\hbar}dx$$

Całkując: $\ln|\varphi(x)| = -\frac{p}{i\hbar}x + C$

$$\varphi(x) = \exp\left(-\frac{px}{i\hbar} + C\right)$$

Ostatecznie funkcja własna operatora pędu:

$$\varphi_p(x) = C_0 \exp\left(\frac{ipx}{\hbar}\right)$$

ponieważ $p = \frac{\hbar}{\lambda} = \hbar \cdot k \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{p}{\hbar}$

$\varphi(x) = C_0 e^{ikx}$ - równanie fali płaskiej (bez części czasowej)

Zasada nieoznaczoności

Rozważamy funkcję stanu

$$\varphi(x) = C\exp\left[-\frac{x^2}{2\Delta x^2}\right].$$

Gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w punkcie x przestrzeni wynosi:

$$P_{\varphi(x)} = |\varphi(x)|^2 \propto \exp\left[-\frac{x^2}{\Delta x^2}\right]$$

Jest to funkcja Gaussa o szerokości połówkowej $\Delta x/\sqrt{2}$.

Rzutujemy funkcję stanu $\varphi(x) = \exp[-\frac{x^2}{2\Delta x^2}]$ na funkcję własną operatora pędu :

$$(\varphi_p(x),\varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi_p{}^*(x)\cdot\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} C_1\exp[\frac{-ipx}{\hbar}]\cdot C_2\exp[\frac{-x^2}{2\Delta x^2}]\quad \mathrm{d}x =$$

$$= C\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-\frac{1}{2}(\frac{x}{\Delta x}+\frac{ip\Delta x}{\hbar})^2 - \frac{p^2\Delta x^2}{2\hbar^2}]\quad \mathrm{d}x =$$

$$\frac{x}{\Delta x}+\frac{ip\Delta x}{\hbar} = u, \qquad \frac{1}{\Delta x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$$

$$= C\exp[-\frac{p^2\Delta x^2}{2\hbar^2}]\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-\frac{1}{2}u^2]\Delta x\,\mathrm{d}u =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp[-\frac{1}{2}u^2]\mathrm{d}u = \sqrt{2\pi}$$

$$= C'\exp[-\frac{p^2\Delta x^2}{2\hbar^2}]$$

$$P_P = \left|(\varphi_P,\varphi)\right|^2 = C''\exp[-\frac{p^2\Delta x^2}{\hbar^2}] = C''\exp[-\frac{p^2}{\Delta p^2}]$$

gdzie: $\Delta p = \frac{\hbar}{\Delta x}$.

Rozkłady położenia i pędu są funkcjami Gaussa o parametrach $\sigma_X = \frac{\Delta x}{\sqrt{2}}$ i $\sigma_P = \frac{\Delta p}{\sqrt{2}}$

Ostatecznie :

$$\sigma_X\cdot\sigma_P = \frac{\Delta x\cdot\Delta p}{2} = \frac{1}{2}\cdot\Delta x\cdot\frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{\hbar}{2}$$

i równość ta zachodzi tylko w przypadku funkcji Gaussa.

W każdym innym przypadku zachodzi:

$$\sigma_X\cdot\sigma_P \geq \hbar/2$$

Powyższa nierówność jest treścią **zasady nieoznaczoności Heisenberga**.