XII Operator momentu pędu. Wartości własne operatora L_z i L^2.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$
$$L_x = yp_z - zp_y$$
$$L_y = zp_x - xp_z$$
$$L_z = xp_y - yp_x$$

W reprezentacji Schrodingera *z*-towa składowa operatora momentu pędu wyraża się wzorem:

$$\hat{L}_z = -i\hbar[x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}]$$

W układzie sferycznym:

$$\hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

Zauważmy, że komutator

$$\left[\hat{L}_x, \hat{L}_y\right] \equiv \hat{L}_x\hat{L}_y - \hat{L}_y\hat{L}_x = i\hbar\hat{L}_z \neq 0\,.$$

Gdy komutator jest różny od zera, znaczy to, że nie można wyznaczyć równocześnie obydwu wartości reprezentowanych przez operatory. W naszym przypadku nie można jednocześnie wyznaczyć wartości dwóch składowych pędu (obowiązuje dla nich zasada nieoznaczoności).

Natomiast dla kwadratu momentu pędu:

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0\,.$$

Stąd wniosek, że można wyznaczyć długość operatora momentu pędu i jedną jego składową .

Wartości własne operatora L_z.

Rozwiązujemy równanie własne operatora momentu pędu i szukamy wartości własnych L_z

$$\hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial \varphi}$$
$$-i\hbar\frac{\partial u}{\partial \varphi} = L_z u$$

$$\frac{\partial u}{u} = -\frac{L_z}{i\hbar}\partial\varphi$$
$$\ln u = \frac{iL_z}{\hbar}\varphi$$
$$u = \exp[\frac{iL_z}{\hbar}\varphi]$$

Przestrzeń fizyczna jest niezmiennicza po obrocie o 2π , a zatem

$$u(\varphi + 2\pi) = u(\varphi)$$
$$\exp[\frac{iL_z}{\hbar}\varphi] = \exp[\frac{iL_z}{\hbar}(\varphi + 2\pi)]$$
$$1 = \exp[\frac{iL_z}{\hbar}2\pi]$$
$$1 = \cos\frac{L_z}{\hbar}2\pi + i\sin\frac{L_z}{\hbar}2\pi$$
$$\frac{L_z}{\hbar}2\pi = m2\pi$$

Zatem, **wartości własne operatora L_z**

$$L_z = m\hbar \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm l$$

Składowa L_z nie może przyjmować dowolnych wartości; wynika to z niezmienniczości względem obrotu o 2π.
Funkcje własne z-towej składowej momentu pędu wyrażają się wzorem:

$$u_m = Ce^{im\varphi}$$

Operator L^2

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$$

Z izotropowości przestrzeni wartości średnie spełniają relację: $\langle L_x^2 \rangle = \langle L_y^2 \rangle = \langle L_z^2 \rangle$

$$\langle L^2 \rangle = 3\langle L_z^2 \rangle$$

$$\langle L^2 \rangle = \frac{1}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}(m\hbar)^2$$ - średnia arytmetyczna kwadratów L_z

$$\langle L_z^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{2l+1}2\sum_{m=1}^{l}m^2$$

$$\langle L_z^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{2l+1} \cdot 2 \cdot \frac{1}{6} l(l+1)(2l+1)$$

$$\langle L^2 \rangle = 3 \cdot \frac{\hbar}{2l+1} \cdot 2 \cdot \frac{1}{6} l(l+1)(2l+1) = l(l+1)\hbar^2$$

$$\langle L^2 \rangle = l(l+1)\hbar^2$$ **wartość własna operatora kwadratu momentu pędu**

Przejdźmy także na współrzędne sferyczne:

$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$; $x = r \sin\vartheta \cos\varphi$; $y = r \sin\vartheta \sin\varphi$; $z = r\cos\vartheta$

Można wykazać, że we współrzędnych sferycznych kwadrat momentu pędu wyraża się wzorem:

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} (\sin\vartheta \frac{\partial}{\partial\vartheta}) + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right]$$

$$\hat{L}^2 \mathrm{Y}(\vartheta, \varphi) = l(l+1) \cdot \hbar^2 \mathrm{Y}(\vartheta, \varphi)$$

Ponieważ $[\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0$, więc istnieje wspólna baza funkcji własnych operatora $\hat{L}^2$ i $\hat{L}_z$. Dla operatora $\hat{L}_z$ funkcjami tymi są $e^{im\varphi}$, zatem możemy zapisać:

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = P_l^m(\theta) e^{im\varphi}$$

oraz

$$\left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right] P_l^m(\theta) = -\beta P_l^m(\theta)$$

funkcje $P_l^m(\cos\theta)$ - są to tzw. stowarzyszone wielomiany Legendre'a .

Funkcje $Y_{l,m}(\theta, \varphi)$ noszą nazwę funkcji kulistych (harmonik sferycznych). Poniżej podano kilka pierwszych funkcji kulistych :

$Y_{0,0} = const$ $\qquad Y_{1,1} = \cos(\theta)$ $\qquad Y_{1,\pm 1} = \sin\theta \cdot e^{\pm i\varphi}$

$Y_{2,0} = (3\cos^2\theta - 1)$ $\qquad Y_{2,\pm 1} = \sin\theta \cos\theta \cdot e^{\pm i\varphi}$

$Y_{2,\pm 2} = \sin^2\theta \cdot e^{\pm 2i\varphi}$