14. PRAWO STEFANA–BOLTZMANNA. PRAWO WIENA.

PRAWO STEFANA-BOLTZMANNA

do fotonów: $\bar{p} = \frac{1}{3}\frac{E}{V}$

Dla fotonów nie jest zachowana liczba cząstek i w związku z tym ciśnienie nie zależy od objętości: (fotonu tworzą się lub znikają na ściankach naczynia):

$$T = const \Rightarrow p = const$$

$$3pV = E$$

$$\begin{cases} \mathrm{d}E = 3p\mathrm{d}V + \overbrace{3V\mathrm{d}p}^{=0} = 3p\mathrm{d}V \\ \mathrm{d}E = T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}V \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 4p\mathrm{d}V = T\mathrm{d}S$$

$$\frac{4p}{T} = \left.\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}V}\right|_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

$$\frac{4p}{T} = \left.\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T}\right|_R \quad \Rightarrow \quad \frac{4\mathrm{d}T}{T} = \frac{\mathrm{d}p}{p} \quad \Rightarrow \quad \ln(p) = 4\ln(T) + C(V)$$

$$p = CT^4$$

$$E = 3pV = 3CT^4 \cdot V$$

$$\frac{E}{V} = \sigma T^4$$ **prawo Stefana (1879 r)**

$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$ –stała Stefana-Boltzmanna

Prawo Wiena

Rozkład Plancka

$$\rho(\nu)\mathrm{d}\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1}\mathrm{d}\nu$$

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\nu = -\frac{c}{\lambda^2}\mathrm{d}\lambda\ ; \qquad \rho(\lambda)\mathrm{d}\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right)-1}\mathrm{d}\lambda$$

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}T} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left[\lambda^5\left(\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right)-1\right)\right] = 0$$

Jeżeli: $\alpha \equiv \frac{hc}{\lambda kT}$ to $5\left(e^{\alpha}-1\right) = e^{\alpha}\alpha$

Jest to równanie nieliniowe, którego rozwiązanie możemy znaleźć w następujący sposób:

Jeżeli: $\alpha > 1 \quad \Rightarrow \quad e^{\alpha} >> 1 \quad \Rightarrow \quad 5e^{\alpha} \approx e^{\alpha}\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 5$

Dokładnie: $\alpha \approx 4.966$.

Ostatecznie: $\lambda_{\max} = \frac{C}{T} = \frac{2898\ \mu\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}}{T}$