17. Rozkład Plancka.

Rozpatrzymy rozkład Bosego-Einsteina dla fotonów

Potencjał chemiczny: μ=0, bo nie jest zachowana liczba cząstek

$$E = \int_{O}^{\infty} \varepsilon \cdot n(\varepsilon) \cdot g(\varepsilon) d\varepsilon$$

$n(\varepsilon)$ - obsadzenie (statystyka)

$g(\varepsilon)$ - gęstość stanów

ω(k) – związek dyspersyjny

$$\varepsilon = h\nu \; ; \qquad p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu}{c} = \hbar \cdot k \; ; \qquad k = \frac{2\pi\nu}{c}$$

Gęstość stanów jest stała w przestrzeni wektora falowego: $w(k) = \frac{2V}{\pi^3}$

$$\int w(k)\, \mathrm{d}^3 k \Big|_\nu = \int \frac{2V}{\pi^3} \cdot \frac{4\pi k^2}{8} \mathrm{d}k \Big|_\nu = \int \frac{2V}{\pi^3} \frac{4\pi}{8} \frac{8\pi^3 \nu^2}{c^3} \mathrm{d}\nu = \int \underbrace{\frac{8V\pi\nu^2}{c^3}}_{\rho(\nu)} \mathrm{d}\nu$$

$$E = \int h\nu \cdot \frac{1}{e^{\beta h\nu} - 1} \cdot \frac{8V\pi\nu^2}{c^3} \mathrm{d}\nu$$

$$\rho_T(\nu)\mathrm{d}\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1} \mathrm{d}\nu$$ **rozkład Plancka dla promieniowania**

Prawo Stefana-Boltzmanna: $E = \int V \rho_T(\nu) \mathrm{d}\nu = V \cdot \sigma \cdot T^4$

Prawo Wiena:

$$\rho_T(\nu)\mathrm{d}\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1} \mathrm{d}\nu \qquad \rho_T(\nu)\mathrm{d}\nu \quad \to \quad \rho_T(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\nu = \frac{-c}{\lambda^2} \mathrm{d}\lambda$$

$$\rho_T(\lambda)\mathrm{d}\lambda = \frac{8\pi h}{c^3}\left(\frac{c}{\lambda}\right)^3 \frac{1}{e^{\frac{\beta hc}{\lambda}}-1}\cdot\frac{-c}{\lambda^2}\mathrm{d}\lambda = -\frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{\beta hc}{\lambda}}-1}\mathrm{d}\lambda$$

$$\frac{\mathrm{d}\rho_T(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = \left[-\frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{\exp\frac{\beta hc}{\lambda}-1}\right]' = \frac{8\pi hc}{\left[\lambda^5\left(\exp\frac{\beta hc}{\lambda}-1\right)\right]^2}\cdot\left[\lambda^5\left(\exp\frac{\beta hc}{\lambda}-1\right)\right]'$$

szukamy λ_{max}, czyli

$$\frac{\mathrm{d}\rho_T(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left[\lambda^5\left(e^{\frac{\beta hc}{\lambda}}-1\right)\right]' = 0$$

$$5\lambda^4 e^{\frac{\beta hc}{\lambda}} + \lambda^5 e^{\frac{\beta hc}{\lambda}}\cdot\frac{-\beta hc}{\lambda^2} - 5\lambda^4 = 0$$

$$5\lambda^4\left(e^{\frac{\beta hc}{\lambda}}-1\right) - \beta hc\lambda^3 e^{\frac{\beta hc}{\lambda}} = 0$$

$$5\left(e^{\frac{\beta hc}{\lambda}}-1\right) - \frac{\beta hc}{\lambda}e^{\frac{\beta hc}{\lambda}} = 0$$

Zróbmy podstawienie $\frac{\beta hc}{\lambda} = \alpha$

$$5\left(e^\alpha - 1\right) - \alpha e^\alpha = 0\,; \qquad 5\left(e^\alpha - 1\right) = \alpha\, e^\alpha$$

dla $\alpha > 1 \Rightarrow e^\alpha >> 1$

wówczas $5e^\alpha \approx \alpha\, e^\alpha$; $\alpha = 5$

$$\frac{\beta hc}{\lambda_{max}} \approx 5\,; \qquad \lambda_{max} \approx \frac{h}{5k}\frac{c}{T}$$

$$\lambda_{max} = \frac{C}{T}$$ **prawo Wiena**