18. Gęstość stanów w przestrzeniach 1, 2, 3-wymiarowych. Periodyczne a sztywne warunki brzegowe.

Obliczamy gęstość stanów w przestrzeni wektora falowego

Periodyczne warunki brzegowe

$$\varphi(x+l) = \varphi(x)$$

Równanie Schrödingera $\varphi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$

$k \cdot l = 2\pi n$ - okresowość 2π $\Rightarrow$ $k = 0, \pm\frac{2\pi}{l}, \pm\frac{\pi}{l}, \pm\frac{6\pi}{l}, \ldots$

$\Delta k = \frac{2\pi}{l}$ na ten obszar przypadają 2 stany, ze względu na spin

$$w(k) = \frac{2}{\Delta k} = 2\left(\frac{l}{2\pi}\right) \text{ - 1 wymiar}$$

Takie rozumowanie można rozciągnąć na więcej wymiarów:

1D: $w(k) = 2\left(\frac{l}{2\pi}\right)$

2D: $w(k) = 2\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2$

3D: $w(k) = 2\left(\frac{l}{2\pi}\right)^3$

Sztywne warunki brzegowe

$\varphi(0) = \varphi(l) = 0$ studnia potencjału

$\varphi(x) = A\sin(kx)$

$k \cdot l = n\pi \Rightarrow k = n\frac{\pi}{l}$ wartości własne są tylko dla dodatnich wartości wektora falowego k - fala stojąca

$$w'(k) = \frac{2}{\Delta k} = 2\frac{l}{\pi}$$

1D: $w'(k) = 2\frac{l}{\pi}$

2D: $w'(k) = 2\left(\frac{l}{\pi}\right)^2$

3D: $w'(k) = 2\left(\frac{l}{\pi}\right)^3$

Mimo, iż $w(k) = \frac{1}{8} w'(k)$, to całkowita liczba stanów jest taka sama, bo całkujemy po wartościach dodatnich ($\frac{1}{8}$ przestrzeni).

Gęstość stanów w przestrzeni energii

1 wymiar

$$w(k)\mathrm{d}k = g(E)\mathrm{d}E$$

$$g(E) = 2w(k) \cdot \frac{1}{\left|\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}k}\right|}$$

$$g(E) = 2 \cdot \frac{2l}{2\pi} \cdot \frac{1}{\frac{\hbar^2 k}{m}} = 2\frac{l}{\pi\hbar}\sqrt{\frac{m}{2E}} \sim \frac{1}{\sqrt{E}}$$

$$g(E) \sim \frac{1}{\sqrt{E}}$$

2 wymiary

stała energia jest na sferze

$$g(E)\mathrm{d}E = 2\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 2\pi \underbrace{k\mathrm{d}k}_{\frac{m}{\hbar^2}\mathrm{d}E}$$

$$g(E)\mathrm{d}E = \frac{l^2}{\pi^2}\pi\frac{m}{\hbar^2}\mathrm{d}E$$ $g(E) = \frac{l^2 m}{\pi\hbar^2}$ **= const**

3 wymiary:

$$g(E)\mathrm{d}E = 2\left(\frac{l}{2\pi}\right)^3 \cdot 4\pi k^2 \mathrm{d}k = 8\pi k^2 \frac{V}{8\pi^3}\mathrm{d}k$$

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \qquad \Rightarrow \qquad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE}$$

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}E} = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m}\cdot\frac{1}{2\sqrt{E}} = \frac{1}{\hbar}\sqrt{\frac{m}{2E}}$$

$$g(E)\mathrm{d}E = \frac{2mE}{\hbar^2}\cdot\frac{v}{\pi^2}\cdot\frac{1}{\hbar}\sqrt{\frac{m}{2E}}dE = \frac{mV}{\pi^2\hbar^3}\sqrt{2mE}\,\mathrm{d}E$$

$$g(E) = \frac{mV}{\pi^2\hbar^3}\sqrt{2mE} \sim \sqrt{E}$$

Rysunek: gęstości stanów w przestrzeni energii (dla przestrzeni 1- 2- 3-wymiarowych)